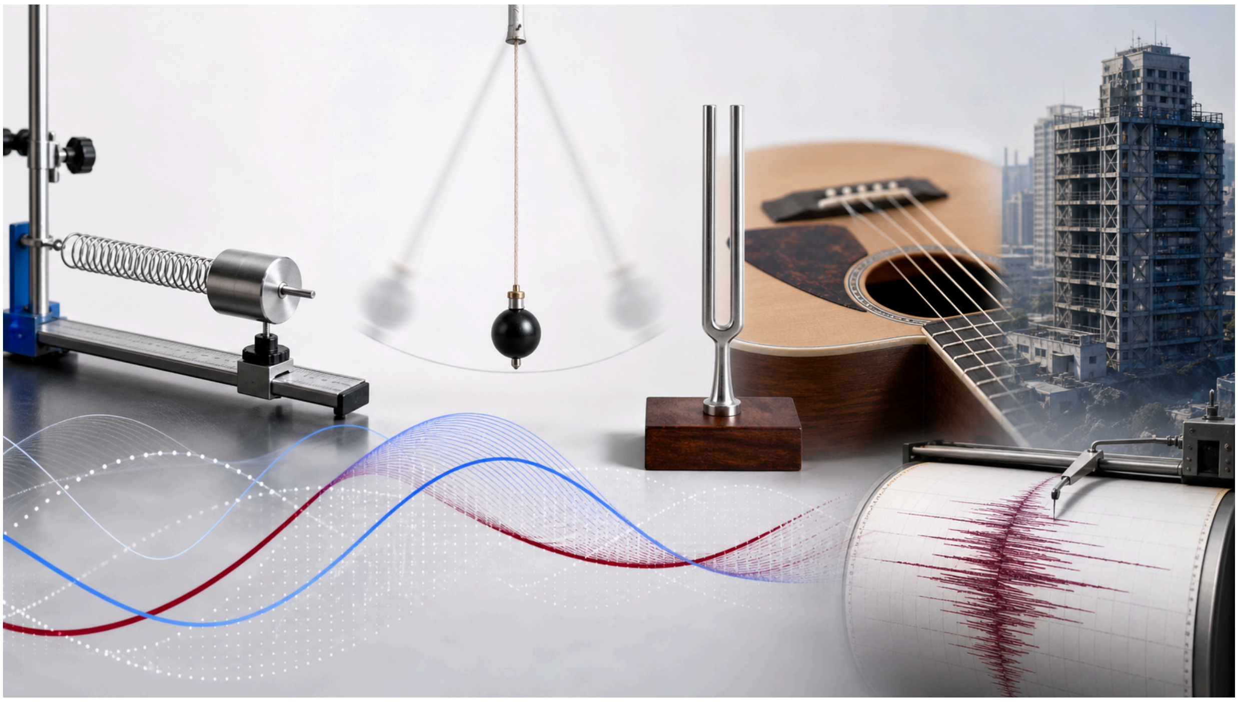
15장: 진동

Oscillations

이번 장에서 배울 내용

- **단순조화운동(simple harmonic motion, SHM)** : 자연에서 가장 기본적인 주기 운동
- **변위, 속도, 가속도** 의 시간 함수: $x(t), v(t), a(t)$
- **에너지 보존** : 운동에너지와 퍼텐셜에너지의 교환
- **진자(pendulum)** : 단진자와 물리 진자
- **등속 원운동과 SHM** 의 관계
- **감쇠진동(damped oscillation)** 과 **강제진동(forced oscillation)**
- **공명(resonance)** : 왜 특정 진동수에서 진폭이 급격히 커지는가

진동은 어디에나 있다



같은 수학이 용수철, 진자, 악기, 건물의 흔들림을 모두 설명한다.

진동 시스템의 공통 구조

- 스마트폰의 진동 모터, 시계의 진자
- 지진파에 의한 건물의 흔들림
- 바이올린 현의 진동이 만드는 소리
- 심장 박동의 주기적 운동, 전기 회로의 교류

모든 진동 시스템에는 **"탄성"** (복원력을 제공)과 **"관성"** (운동을 유지)이라는 두 요소가 존재한다. 이 장에서는 가장 기본적인 진동인 **단순조화운동** 을 깊이 이해한다.

15.1 단순조화운동

주기 운동의 기본 개념

주기적으로 반복되는 운동을 **주기 운동(periodic motion)** 이라 한다.

- **진동수(frequency)** f: 단위 시간당 진동 횟수. 단위는 Hz ($1\ \mathrm{Hz} = 1\ \mathrm{s}^{-1}$)
- **주기(period)** T: 한 번의 완전한 진동에 걸리는 시간

$$T = \frac{1}{f}$$

주기 운동 중에서 **사인 함수(또는 코사인 함수)** 로 기술되는 운동을 **단순조화운동(SHM)** 이라 한다.

SHM의 변위 함수

SHM을 하는 입자의 위치:

$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

- x_m: **진폭(amplitude)**. 평형 위치에서 최대 변위까지의 거리 (항상 양수)
- ω: **각진동수(angular frequency)**. 단위 rad/s
- ϕ: **위상 상수(phase constant)**. 초기 조건에 의해 결정
- $\omega t + \phi$: **위상(phase)**

각진동수, 주기, 진동수의 관계

한 주기 T 동안 위상이 2π 변하므로:

$$\omega T = 2\pi$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

물리량	기호	단위	관계
주기	T	s	$T = 1/f = 2\pi/\omega$
진동수	f	Hz	$f = 1/T = \omega/2\pi$
각진동수	ω	rad/s	$\omega = 2\pi f = 2\pi/T$

SHM의 속도

$x(t)$를 시간에 대해 미분하면:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$$

- **속도 진폭(velocity amplitude)** : $v_m = \omega x_m$
- $x = 0$ (평형점)에서 속력이 최대: $|v| = \omega x_m$
- $x = \pm x_m$ (양 끝)에서 속력이 0

SHM의 가속도

$v(t)$를 다시 미분하면:

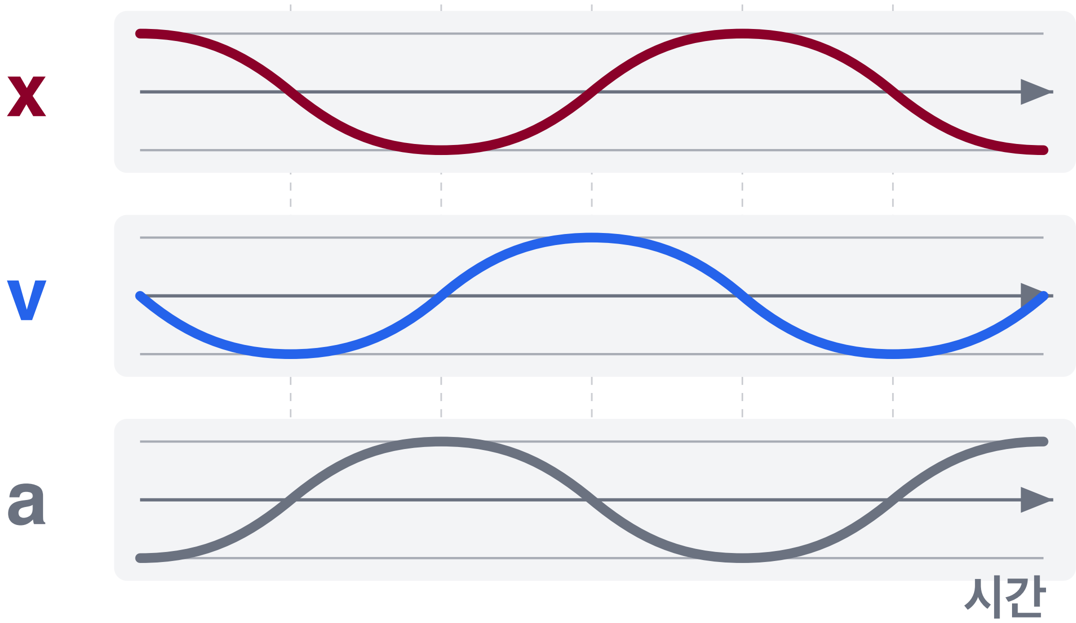
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi)$$

- **가속도 진폭(acceleration amplitude)** : $a_m = \omega^2 x_m$
- 가속도와 변위의 관계:

$$\boxed{a(t) = -\omega^2 x(t)}$$

이것이 **SHM의 핵심 특징** 이다: 가속도가 변위에 비례하고 방향이 반대!

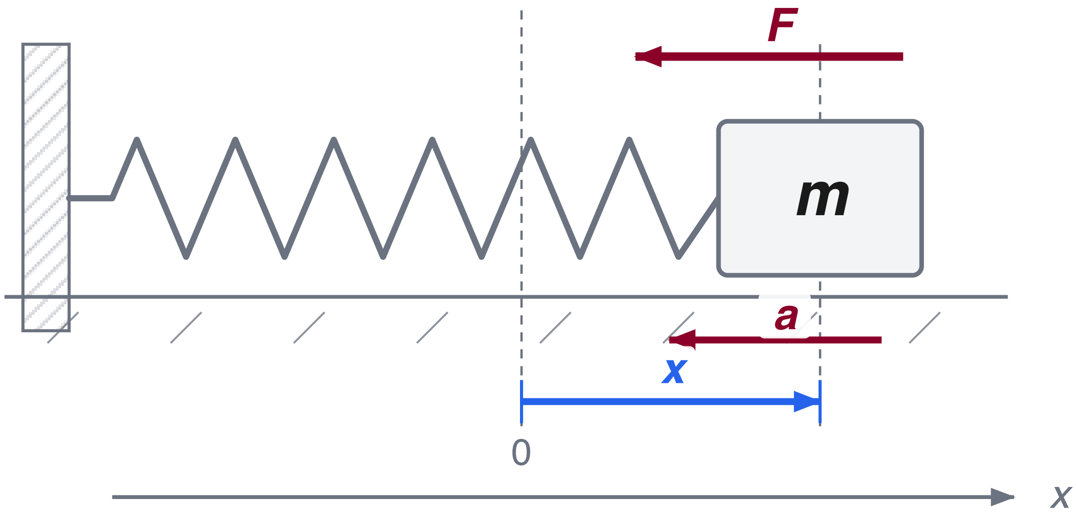
변위, 속도, 가속도 그래프



$$
\begin{aligned}
x(t) &= x_m \cos(\omega t + \phi), \\
v(t) &= -\omega x_m \sin(\omega t + \phi), \\
a(t) &= -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x(t).
\end{aligned}
$$

세 그래프는 $T/4$ 만큼 위상이 어긋나며, 진폭은 각각 $x_m, \omega x_m, \omega^2 x_m$ 이다.

용수철-질량 계: SHM의 대표적 예



$$F = -kx, \qquad a = -\frac{k}{m}x, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

훅 법칙과 SHM

질량 m인 물체에 용수철 상수 k인 용수철이 연결되어 있을 때:

$$F = -kx \quad (\text{훅 법칙})$$

뉴턴 제2법칙 $F = ma$에서:

$$ma = -kx \implies a = -\frac{k}{m}x$$

SHM 조건 $a = -\omega^2 x$와 비교하면 $\omega^2 = k/m$이므로:

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

주기의 물리적 의미

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

- k가 크면 (빳빳한 용수철) → T 감소 → 빠른 진동
- m이 크면 (무거운 물체) → T 증가 → 느린 진동
- **진폭 x_m에 무관**. 진폭이 커져도 주기는 같다! (SHM의 등시성)

모든 진동계에는 **"탄성" 요소** (에너지를 저장하는 용수철 역할)와 **"관성" 요소** (운동에너지를 저장하는 질량 역할)가 있다.

위상 상수의 결정

초기 조건 $x(0) = x_0, v(0) = v_0$에서:

$$x_0 = x_m \cos\phi, \quad v_0 = -\omega x_m \sin\phi$$

이 두 식을 나누면:

$$\tan\phi = -\frac{v_0}{\omega x_0}$$

단, $\tan^{-1}$만 쓰면 사분면 정보가 빠질 수 있다. 실제 계산에서는 $x_0 = x_m \cos\phi, v_0 = -\omega x_m \sin\phi$를 함께 만족하는 사분면을 골라야 한다.

진폭은:

$$x_m = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

예제: SHM의 기본량 구하기

용수철 상수 $k = 200$ N/m에 질량 $m = 0.50$ kg인 물체가 매달려 있다. 진폭 $x_m = 0.10$ m으로 진동할 때:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200}{0.50}} = 20 \text{ rad/s}$$

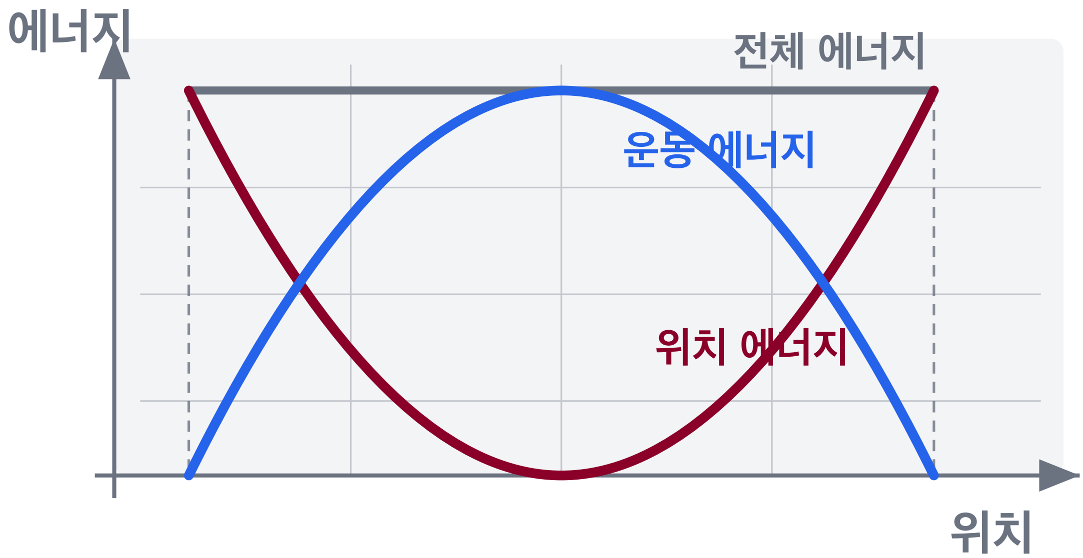
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20} = 0.314 \text{ s}, \quad f = \frac{1}{T} = 3.18 \text{ Hz}$$

최대 속력: $v_m = \omega x_m = 20 \times 0.10 = 2.0 \text{ m/s}$

최대 가속도: $a_m = \omega^2 x_m = 400 \times 0.10 = 40 \text{ m/s}^2$

15.2 단순조화운동의 에너지

에너지의 교환



$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2, \qquad K(x) = E - U(x), \qquad E = \frac{1}{2}kx_m^2$$

운동에너지와 퍼텐셜에너지

퍼텐셜에너지(elastic potential energy) :

$$U(t) = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2\cos^2(\omega t + \phi)$$

운동에너지(kinetic energy) :

$$K(t) = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 x_m^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}kx_m^2\sin^2(\omega t + \phi)$$

(여기서 $m\omega^2 = k$를 사용했다.)

역학적 에너지 보존

$$E = K + U = \frac{1}{2}kx_m^2 \sin^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}kx_m^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2}kx_m^2[\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)]$$

$$\boxed{E = \frac{1}{2}kx_m^2 = \text{일정}}$$

- $x = 0$에서: $K = E$ (모두 운동에너지), $U = 0$
- $x = \pm x_m$에서: $U = E$ (모두 퍼텐셜에너지), $K = 0$

에너지가 운동에너지와 퍼텐셜에너지 사이를 끊임없이 교환하지만, **전체 역학적 에너지는 보존** 된다.

속력과 변위의 관계

에너지 보존 $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_m^2$에서:

$$v = \pm\omega\sqrt{x_m^2 - x^2}$$

이 관계를 사용하면 임의의 위치 x에서의 속력을 바로 구할 수 있다.

15.3 각 단순조화진동자

비틀림 진자

비틀림 진자(torsion pendulum) : 와이어에 매달린 원판이 비틀림으로 진동

복원 돌림힘:

$$\tau = -\kappa\theta$$

여기서 κ는 **비틀림 상수(torsion constant)** 이다.

훅 법칙 $F = -kx$와 같은 구조! ($x \to \theta, k \to \kappa, m \to I$)

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{\kappa}}}$$

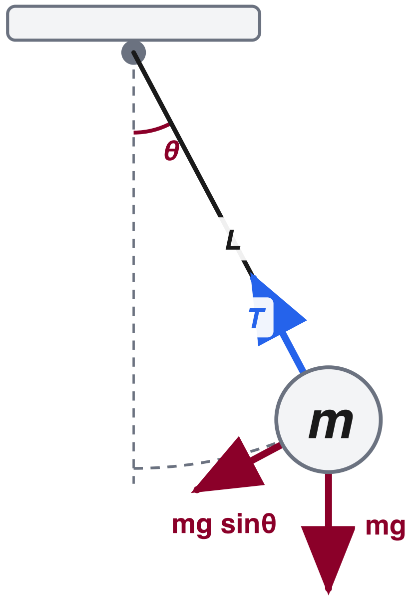
I는 회전축에 대한 관성 모멘트이다.

15.4 진자

단진자의 실제 모습

진자는 중력이 복원력을 제공하고, 추의 관성이 운동을 유지하는 진동계이다.

단진자



$$\tau = -mgL\sin\theta, \qquad \alpha = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

단진자의 주기 유도

길이 L, 질량 m인 단진자. 피벗에 대한 복원 돌림힘:

$$\tau = -L(mg\sin\theta)$$

회전의 뉴턴 제2법칙 $\tau = I\alpha$에서 ($I = mL^2$):

$$-mgL\sin\theta = mL^2\alpha \implies \alpha = -\frac{g}{L}\sin\theta$$

작은 각도 근사 ($\sin\theta \approx \theta$, θ는 rad 단위):

$$\alpha \approx -\frac{g}{L}\theta$$

이것은 각변수에 대한 SHM 조건 $\alpha = -\omega^2\theta$ 형태이다. 따라서:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}, \quad \boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

단진자의 핵심 특징

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

- 주기는 **줄의 길이 L** 에만 의존
- **질량 m에 무관**. 무거운 추나 가벼운 추나 같은 주기!
- **진폭에 무관** (작은 각도 범위에서)
- g를 정밀하게 측정하는 데 사용 가능: $g = 4\pi^2 L/T^2$

갈릴레오가 피사 대성당의 샹들리에 진동을 관찰하고 이 성질을 발견했다고 전해진다.

물리 진자

물리 진자(physical pendulum) : 임의의 형태를 가진 강체 진자

피벗 O에서 질량 중심까지의 거리를 h라 하면:

$$\tau = -mgh \sin\theta$$

$\tau = I\alpha$에서 (I는 피벗에 대한 관성 모멘트):

$$\alpha = -\frac{mgh}{I}\sin\theta \approx -\frac{mgh}{I}\theta$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}}}$$

단진자와 비교: $I = mL^2$, $h = L$을 대입하면 $T = 2\pi\sqrt{L/g}$로 환원된다.

예제: 막대의 진동

길이 L의 균일한 막대를 한쪽 끝에서 매달아 진동시키면:

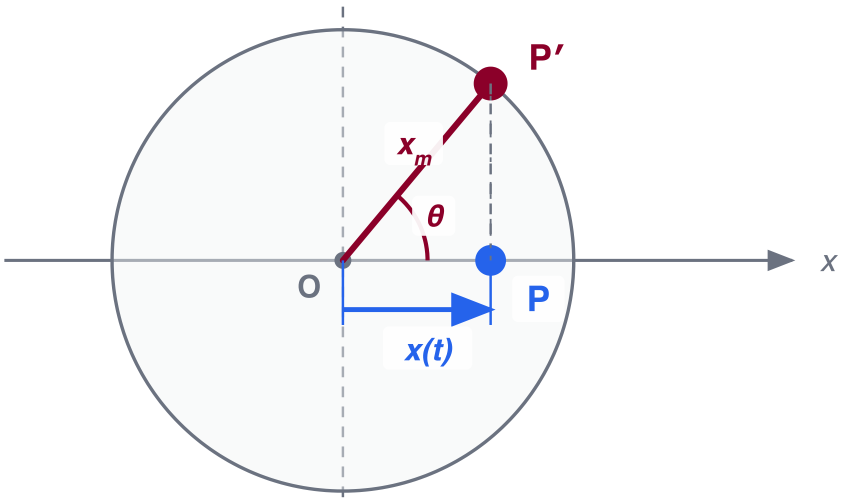
$$I = \frac{1}{3}mL^2 \quad (\text{한쪽 끝 기준}), \quad h = \frac{L}{2}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgh}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{mg \cdot \frac{L}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

$L = 1.00$ m일 때: $T = 2\pi\sqrt{\frac{2(1.00)}{3(9.80)}} = 1.64\ \text{s}$

15.5 단순조화운동과 등속 원운동

SHM은 원운동의 투영이다



$$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$$

원 위의 점 P'을 x축에 투영한 점 P가 SHM을 한다.

시뮬레이션: 단순조화운동 시뮬레이션

15.6 감쇠 단순조화운동

감쇠력

현실의 진동은 마찰이나 공기 저항 때문에 점차 줄어든다. 이를 **감쇠진동 (damped oscillation)** 이라 한다.

감쇠력이 속도에 비례한다고 가정하면:

$$F_d = -bv$$

여기서 b는 **감쇠 상수(damping constant)** 이다.

감쇠진동의 운동 방정식

뉴턴 제2법칙: $-kx - bv = ma$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

이 미분방정식의 해 ($b < 2\sqrt{km}$인 **부족감쇠** 의 경우):

$$\boxed{x(t) = x_m e^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi)}$$

감쇠진동의 각진동수와 에너지

감쇠 진동의 각진동수:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

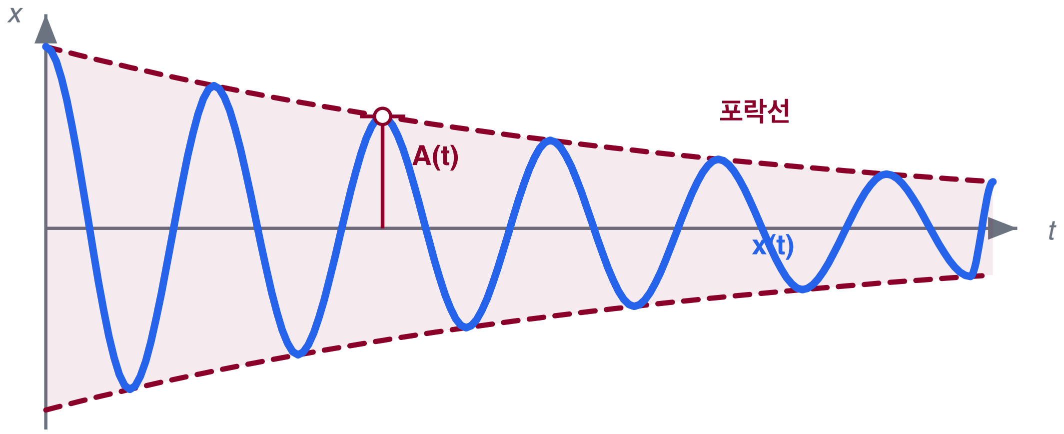
- $b = 0$이면 $\omega' = \omega_0 = \sqrt{k/m}$ (비감쇠)
- b가 커지면 ω'이 감소 (진동이 느려짐)
- $b = 2\sqrt{km}$이면 **임계 감쇠(critical damping)**. 진동 없이 평형으로 복귀

감쇠가 작을 때 ($b \ll \sqrt{km}$) 역학적 에너지:

$$\boxed{E(t) \approx \frac{1}{2}kx_m^2 e^{-bt/m}}$$

에너지가 지수적으로 감소한다.

감쇠 진동의 시각화

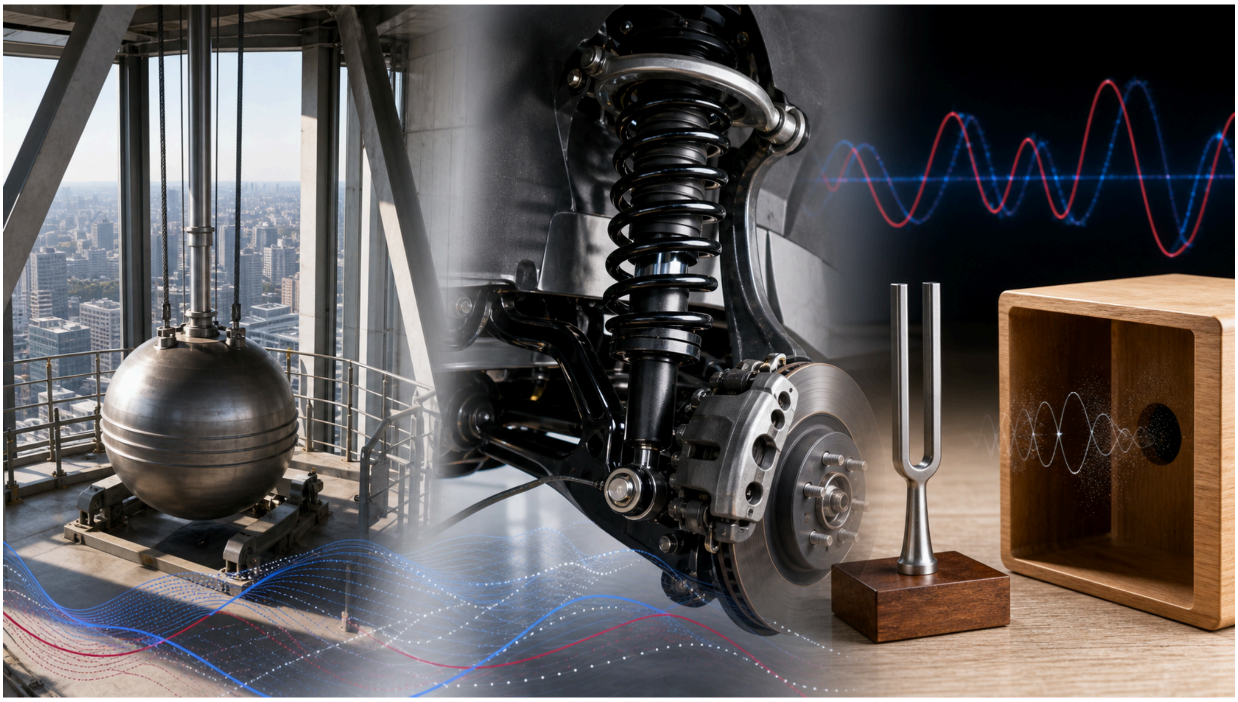


$$x(t) = x_m e^{-bt/2m} \cos(\omega' t + \phi), \qquad A(t) = x_m e^{-bt/2m}$$

시뮬레이션: 감쇠진동 시뮬레이션

15.7 강제진동과 공명

감쇠와 공명의 실제 장치



진동은 유용하게 증폭되기도 하고, 구조물과 기계에서는 반드시 제어해야 할 대상이 되기도 한다.

강제진동

감쇠 진동계에 외부에서 주기적 힘을 가하면:

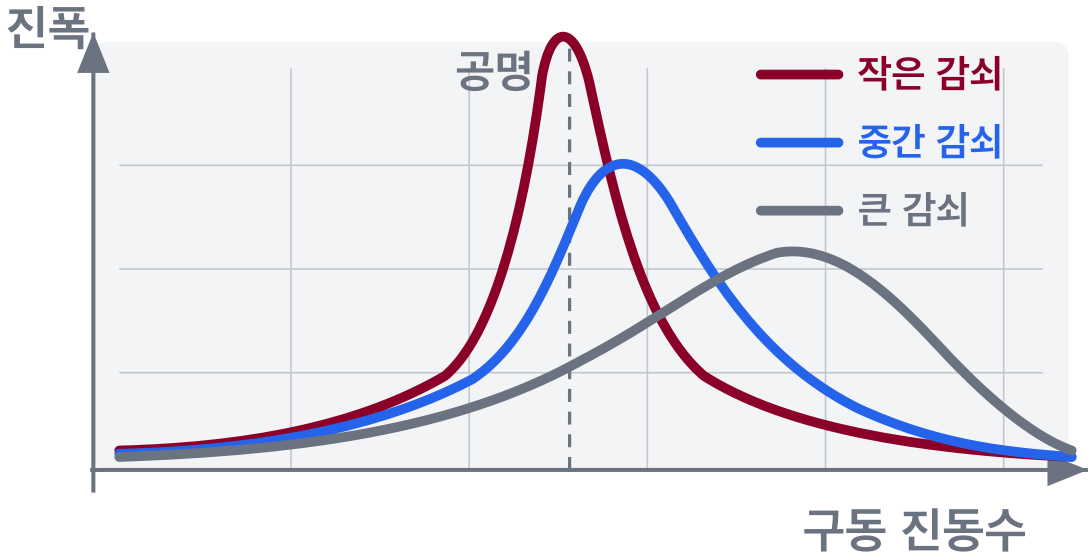
$$F_{\text{ext}} = F_0 \cos(\omega_d t)$$

여기서 ω_d는 **구동 각진동수(driving angular frequency)** 이다.

충분한 시간이 지나면 계는 **구동 진동수** 로 진동한다 (고유 진동수가 아니라!):

$$x(t) = A \cos(\omega_d t + \phi')$$

공명 곡선



감쇠가 작을수록 공명 피크가 높고 날카롭다.

공명 조건

진폭 A는 ω_d에 의존한다. ω_d가 계의 고유 진동수 $\omega_0 = \sqrt{k/m}$에 가까워지면 진폭이 급격히 증가한다.

$$\omega_d \approx \omega_0 \quad \Rightarrow \quad \text{진폭 최대!}$$

이것이 **공명(resonance)** 이다.

감쇠가 작을수록 공명 피크는 **더 높고 날카로워진다**.

공명의 실생활 예시

- **그네** : 자연스러운 주기에 맞춰 밀면 작은 힘으로도 진폭이 커진다
- **구조물 진동 제어** : 바람이나 지진의 주파수가 구조물의 고유 진동수 근처에 오래 머물지 않도록 설계하고, 감쇠 장치를 넣는다
- **타코마 내로우즈 다리** : 공명 사례로 자주 소개되지만, 실제 핵심은 바람과 구조물이 결합한 공력탄성 플러터(aeroelastic flutter)였다
- **악기** : 현의 고유 진동수에서 공명하여 소리 증폭
- **MRI** : 자기장에서 수소 원자핵의 공명 진동을 이용

Review & Summary

핵심 개념

개념	공식
SHM 변위	$x(t) = x_m \cos(\omega t + \phi)$
SHM 속도	$v(t) = -\omega x_m \sin(\omega t + \phi)$
SHM 가속도	$a(t) = -\omega^2 x(t)$
용수철 각진동수	$\omega = \sqrt{k/m}$
용수철 주기	$T = 2\pi\sqrt{m/k}$
역학적 에너지	$E = \frac{1}{2}kx_m^2$

핵심 개념 (계속)

개념	공식
단진자 주기	$T = 2\pi\sqrt{L/g}$
물리 진자 주기	$T = 2\pi\sqrt{I/(mgh)}$
비틀림 진자 주기	$T = 2\pi\sqrt{I/\kappa}$
감쇠 진동	$x(t) = x_m e^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi)$
감쇠 에너지	$E(t) \approx \frac{1}{2}kx_m^2 e^{-bt/m}$
공명 조건	$\omega_d \approx \omega_0$

기억할 것:

- SHM에서 가속도는 변위에 비례, 방향 반대: $a = -\omega^2 x$
- 에너지는 K와 U 사이를 교환하지만, 전체는 보존
- 단진자 주기는 **질량과 무관** , 길이에만 의존
- 감쇠는 진폭을 지수적으로 감소시키고, 공명은 구동 진동수가 맞을 때 정상상태 진폭을 크게 만든다