13장: 중력

Gravitation

이번 장에서 배울 내용

- **뉴턴의 만유인력 법칙(Newton's law of gravitation)**: $F = G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}$
- **중첩 원리(superposition principle)**: 여러 물체에 의한 중력의 벡터 합
- **지표면 근처의 중력**: 중력 가속도 a_g와 자유 낙하 가속도 g의 차이
- **지구 내부의 중력**: 구각 정리(shell theorem)
- **중력 퍼텐셜에너지(gravitational potential energy)**: $U = -\dfrac{GMm}{r}$
- **탈출 속력(escape speed)**: $v = \sqrt{2GM/R}$
- **케플러 법칙(Kepler's laws)**: 타원 궤도, 면적 속도, 주기의 법칙
- **위성의 에너지**: 원궤도와 타원 궤도의 역학적 에너지

왜 중력을 배우는가?

지금까지 우리는 중력 가속도 $g = 9.8\ \mathrm{m/s}^2$ 를 상수처럼 사용했다. 하지만 실제로 g 는 위치에 따라 달라진다.

대한민국 나로우주센터 에서 발사된 누리호는 지표면에서 우주까지 가속하면서, 중력이 점점 약해지는 것을 경험한다. 인공위성이 궤도를 유지하고, 달이 지구 주위를 돌고, 지구가 태양 주위를 도는 것. 이 모든 현상의 근원이 **뉴턴의 만유인력 법칙** 이다.

13.1 뉴턴의 만유인력 법칙

만유인력 법칙 (Newton's Law of Gravitation)

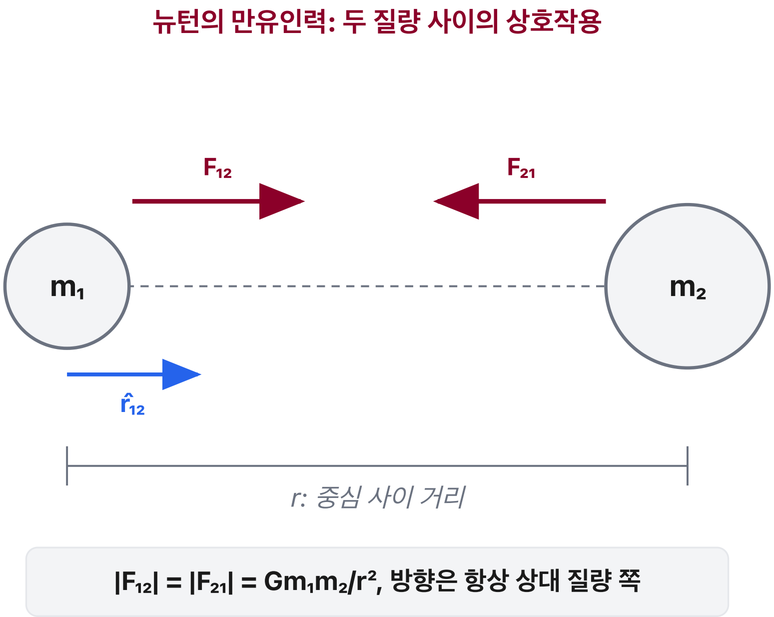
우주의 모든 입자는 다른 모든 입자를 끌어당긴다. 질량 m_1과 m_2인 두 입자가 거리 r만큼 떨어져 있을 때, 중력의 크기는:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

여기서 G 는 **만유인력 상수(gravitational constant)** 이다:

$$G = 6.674 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$$

만유인력의 특성



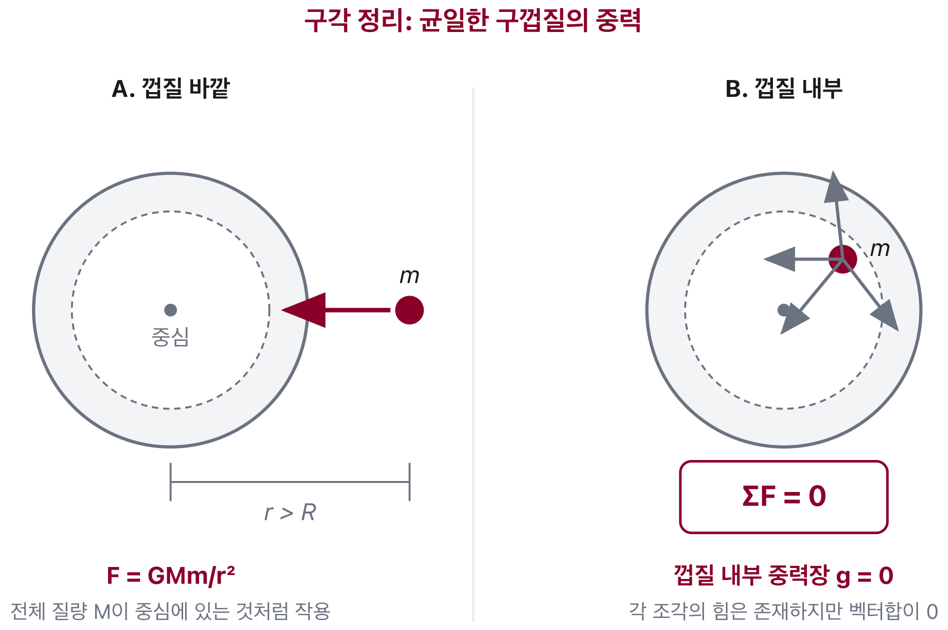
- 중력은 항상 **인력(attractive force)** 이다. 척력은 없다
- 두 입자 사이의 연결선을 따라 작용한다
- **뉴턴의 제3법칙** 에 따라, 입자 1이 입자 2를 당기는 힘과 입자 2가 입자 1을 당기는 힘은 크기가 같고 방향이 반대
- 중력은 다른 물체에 의해 **차폐되지 않는다**. 사이에 무엇이 있든 상관없이 작용

벡터 형태로 쓸 때는 단위벡터의 방향을 분명히 정해야 한다. $\hat{r}_{12}$를 **입자 1에서 입자 2로 향하는** 단위벡터로 정의하면, 입자 2가 입자 1에 작용하는 힘은:

$$\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}_{12}$$

반대로 $\hat{r}$을 **힘을 주는 물체에서 받는 물체로 향하는** 단위벡터로 잡으면 같은 힘을 $\vec{F} = -Gm_1m_2\hat{r}/r^2$처럼 쓴다. 핵심은 언제나 **상대방을 향하는 인력** 이라는 점이다.

구각 정리 (Shell Theorem)



균일한 구형 껍질(또는 구)에 대해 두 가지 중요한 결과가 있다:

정리 1: 균일한 구형 껍질은 껍질 **바깥** 에 있는 입자를 마치 **모든 질량이 중심에 집중** 된 것처럼 끌어당긴다.

정리 2: 균일한 구형 껍질은 껍질 **내부** 에 있는 입자에 **알짜 중력을 작용하지 않는다.**

> 덕분에 지구(구형 대칭)는 지표면 위의 물체를 마치 지구의 모든 질량이 중심에 있는 것처럼 끌어당긴다!

13.2 중력과 중첩 원리

중첩 원리 (Principle of Superposition)

n개의 입자가 있을 때, 입자 1에 작용하는 알짜 중력은 다른 모든 입자에 의한 중력의 **벡터합** 이다:

$$\vec{F}_{1,\text{net}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \cdots + \vec{F}_{1n}$$

$$\vec{F}_{1,\text{net}} = \sum_{i=2}^{n} \vec{F}_{1i}$$

각각의 힘 $\vec{F}_{1i}$는 다른 입자들의 존재에 영향받지 않고, 입자 1과 i 사이의 거리와 질량만으로 결정된다.

예제: 세 입자의 중력

질량 $m_1 = 6.0$ kg인 입자가 원점에 있다. $m_2 = m_3 = 4.0$ kg이 각각 $(0, a)$와 $(-2a, 0)$에 있다. $a = 0.020$ m일 때 m_1이 받는 알짜 힘은?

$\vec{F}_{12}$: $+y$ 방향

$$F_{12} = G\frac{m_1 m_2}{a^2} = \frac{(6.67 \times 10^{-11})(6.0)(4.0)}{(0.020)^2} = 4.00 \times 10^{-6}\ \mathrm{N}$$

$\vec{F}_{13}$: $-x$ 방향

$$F_{13} = G\frac{m_1 m_3}{(2a)^2} = \frac{(6.67 \times 10^{-11})(6.0)(4.0)}{(0.040)^2} = 1.00 \times 10^{-6}\ \mathrm{N}$$

예제 (계속): 알짜 힘 합성

성분: $\vec{F}_{12}$는 $+y$, $\vec{F}_{13}$은 $-x$ 방향. 따라서 $F_x = -1.00 \times 10^{-6}\,\mathrm{N}$, $F_y = +4.00 \times 10^{-6}\,\mathrm{N}$ → 제2사분면.

크기:

$$F_{\text{net}} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(1.00)^2 + (4.00)^2} \times 10^{-6}\,\mathrm{N} = 4.12 \times 10^{-6}\,\mathrm{N}$$

방향: 계산기의 $\tan^{-1}$은 분자/분모 부호를 잃고 결과를 1·4사분면(−90°~+90°)으로만 돌려준다.

$$\tan^{-1}\frac{F_y}{F_x} = \tan^{-1}\frac{4.00}{-1.00} = \tan^{-1}(-4.00) = -76^\circ \quad (1,4\text{사분면})$$

실제는 제2사분면이므로 $+180^\circ$ 보정:

$$\theta = -76^\circ + 180^\circ = 104^\circ \quad (+x\text{축에서 반시계 방향})$$

연속 분포로의 일반화

확장된 물체에 대해서는 미소 질량 dm에 의한 미소 힘 $d\vec{F}$를 적분:

$$\vec{F}_1 = \int d\vec{F}$$

균일한 구 또는 구형 껍질이면 **구각 정리(shell theorem)** 에 의해 질량이 중심에 모인 점입자처럼 취급할 수 있다. 다음 절에서 자세히.

시뮬레이션: 중력장 시각화

13.3 지표면 근처의 중력

중력 가속도 a_g

지구(질량 M, 반지름 R)의 중심에서 거리 r에 있는 질량 m인 입자에 작용하는 중력:

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

뉴턴의 제2법칙 $F = ma_g$ 에서:

$$a_g = \frac{GM}{r^2}$$

고도 (km)	a_g (m/s^2)	예시
0	9.83	지표면 평균
8.8	9.80	에베레스트
36.6	9.71	최고 고도 풍선
400	8.70	ISS 궤도
35,700	0.225	정지궤도 위성

왜 g는 장소마다 다른가?

실제 지표면에서 측정하는 자유 낙하 가속도 g는 중력 가속도 a_g와 약간 다르다. 세 가지 원인:

1. 질량 분포가 불균일하다: 지구 내부의 밀도가 지역마다 다르므로, 지표면의 a_g도 장소에 따라 다르다.

2. 지구는 완전한 구가 아니다: 적도 반지름이 극 반지름보다 약 21 km 더 크다 (타원체). 극지방이 중심에 더 가까우므로 a_g가 더 크다.

3. 지구가 자전한다: 지표면의 물체는 지구와 함께 원운동을 하므로, 구심 가속도가 필요하다.

지구 자전의 효과

적도에서, 체중계 위의 물체에 대한 뉴턴의 제2법칙:

$$F_N - ma_g = m(-\omega^2 R)$$

측정되는 무게 $mg = F_N$ 이므로:

$$mg = ma_g - m\omega^2 R$$

$$g = a_g - \omega^2 R$$

적도에서의 차이:

$$\omega^2 R = \left(\frac{2\pi}{24 \times 3600}\right)^2 \times 6.37 \times 10^6 \approx 0.034 \text{ m/s}^2$$

a_g에 비해 매우 작으므로 ($\approx 0.3\%$), 대부분의 경우 $g \approx a_g$로 근사한다.

무중량 vs. 무중력

ISS 고도(400 km)에서 $a_g \approx 8.7\ \mathrm{m/s^2}$, 지상의 약 **89 %** 다. 우주 비행사가 둥둥 떠 있는 이유는 중력이 없어서가 아니라 우주 정거장과 함께 **자유 낙하(원궤도)** 하고 있기 때문이다. 중력이 모두 구심 가속을 만드는 데 쓰여 체중계가 0을 가리킨다(무중량 상태, weightless).

13.4 지구 내부의 중력

균일 밀도 구 내부

균일한 밀도 ρ인 구(질량 M, 반지름 R) 내부, 중심에서 거리 r인 지점에서의 중력:

구각 정리에 의해, 반지름 r 바깥의 껍질은 힘을 작용하지 않는다. 반지름 r 안쪽의 질량만 기여한다:

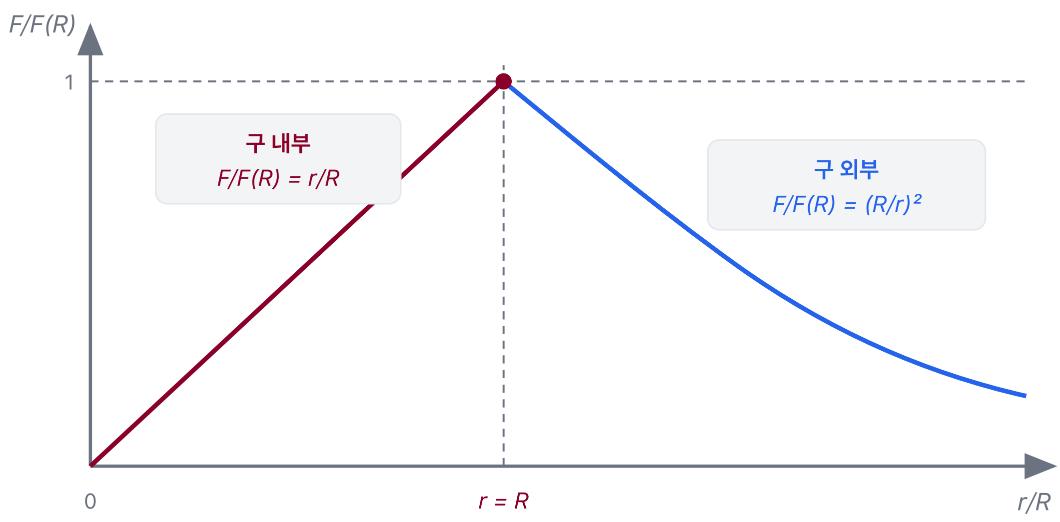
$$M_{\text{ins}} = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{M}{R^3} r^3$$

따라서 질량 m에 작용하는 중력:

$$F = G\frac{mM_{\text{ins}}}{r^2} = G\frac{mM}{R^3} r$$

중심에서의 거리에 **비례** 한다! ($r = 0$이면 $F = 0$)

균일 밀도 구의 내부와 외부 중력



균일 밀도에서는 $M_{ins} = M(r/R)^3$ 이므로 내부 힘은 중심에서 0, 표면에서 최대

교재의 핵심 경고: 이것은 **균일 밀도 지구** 에 대한 이상화다. 실제 지구는 밀도가 중심으로 갈수록 커지므로, 지표면에서 안쪽으로 조금 내려갈 때는 중력이 오히려 증가할 수 있고, 어느 깊이 이후에 감소한다.

지구 중심을 관통하는 터널

만약 지구를 관통하는 터널이 있다면, 터널 안의 물체에 작용하는 힘:

$$\vec{F} = -\frac{GmM}{R^3}\vec{r} = -K\vec{r}$$

이것은 **훅 법칙** ($\vec{F} = -k\vec{x}$)과 같은 형태이다!

따라서 물체는 지구 중심을 기준으로 **단순조화운동(SHM)** 을 한다.

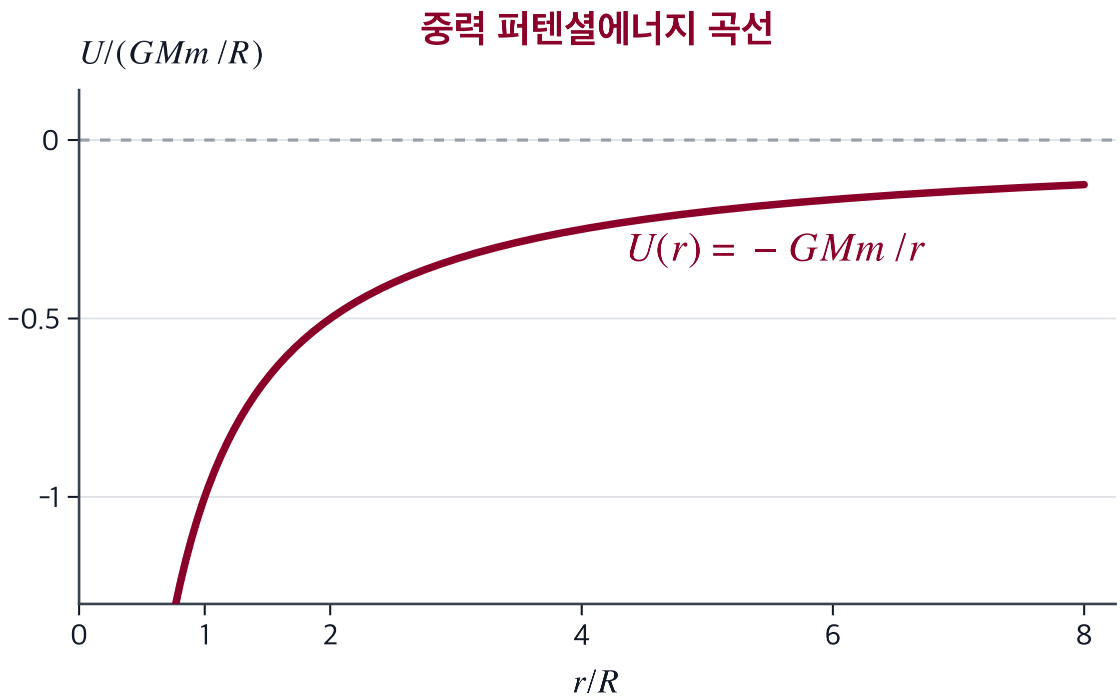
주기:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} \approx 84 \text{ min}$$

> 지구를 관통하는 직선 터널이 있으면 (양 끝 지점이 어디든) 출발지로부터 약 **42분** 만에 도착하는 SHM 반주기 운동이다.

13.5 중력 퍼텐셜에너지

일반적인 중력 퍼텐셜에너지



지금까지 $U = mgh$를 사용했지만, 이는 g가 일정한 지표면 근처에서만 유효하다.

일반적으로, 질량 M과 m이 거리 r만큼 떨어져 있을 때:

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

기준점: $r \to \infty$에서 $U = 0$ (무한히 먼 곳이 기준)

$U = -GMm/r$ 의 유도

질량 M(지구)의 표면에서 공을 위로 던진다. 거리 R에서 무한대까지 중력이 한 일:

$$W = \int_R^\infty \vec{F}(r) \cdot d\vec{r} = \int_R^\infty \left(-\frac{GMm}{r^2}\right) dr$$

$$W = \left[\frac{GMm}{r}\right]_R^\infty = 0 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{R}$$

$\Delta U = U_\infty - U_R = -W$ 이고, $U_\infty = 0$이므로:

$$U_R = W = -\frac{GMm}{R}$$

R을 일반적인 r로 바꾸면:

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

U(r)의 특성

- 항상 **음수** (r이 유한한 한)
- $r \to \infty$이면 $U \to 0$
- r이 작을수록 U가 더 음수. 더 깊은 중력 우물(gravitational well)

경로 독립: 중력은 보존력이므로, ΔU는 경로에 무관하고 시작점과 끝점의 위치에만 의존한다.

퍼텐셜에너지에서 힘을 구할 수도 있다:

$$F(r) = -\frac{dU}{dr} = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{GMm}{r}\right) = -\frac{GMm}{r^2}$$

음수 부호는 힘이 r이 줄어드는 방향(인력)임을 나타낸다.

여러 입자의 퍼텐셜에너지

교재에서 강조하는 점: 중력 퍼텐셜에너지는 한 물체의 소유물이 아니라 **계 (system)** 의 에너지다. 입자가 여러 개이면 모든 쌍(pair)의 퍼텐셜에너지를 더한다.

세 입자 m_1, m_2, m_3에 대해서:

$$U = -G\left(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}}\right)$$

- 힘은 벡터합: $\vec{F}_{\text{net}} = \sum \vec{F}_i$
- 퍼텐셜에너지는 스칼라합: $U_{\text{total}} = \sum U_{\text{pairs}}$
- 지구-공처럼 $M \gg m$이면 관습적으로 "공의 퍼텐셜에너지"라고 말해도 되지만, 정확히는 **지구-공 계의 에너지** 다.

탈출 속력 (Escape Speed)

질량 M, 반지름 R인 천체의 표면에서 물체를 쏘아 올릴 때, 무한히 멀리 보내려면 필요한 최소 속력:

에너지 보존:

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \left(-\frac{GMm}{R}\right) = 0 + 0$$

$$\boxed{v_{\text{escape}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}}}$$

여러 천체의 탈출 속력

천체	질량 (kg)	반지름 (m)	탈출 속력 (km/s)
달	7.36×10^{22}	1.74×10^{6}	2.38
지구	5.98×10^{24}	6.37×10^{6}	11.2
목성	1.90×10^{27}	7.15×10^{7}	59.5
태양	1.99×10^{30}	6.96×10^{8}	618

- 탈출 속력은 **방향에 무관** 하다 (수직이든 비스듬히든)
- 지구의 탈출 속력 11.2 km/s $\approx$ 40,300 km/h (총알 속도의 약 14배)
- 실제 로켓은 지구 자전 속도를 보태기 위해 가능한 한 동쪽 방향으로 발사한다. 탈출 속력 자체가 바뀌는 것은 아니지만, 필요한 연료가 줄어든다.

13.6 행성과 위성: 케플러의 법칙

케플러의 세 법칙 (Kepler's Three Laws)

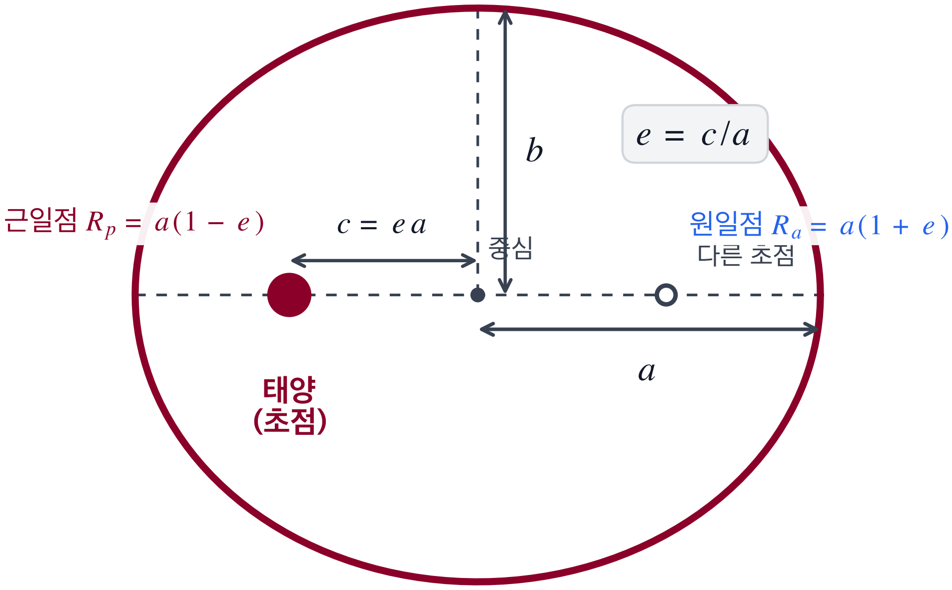
요하네스 케플러(Johannes Kepler, 1571-1630)는 티코 브라헤(Tycho Brahe)의 관측 데이터를 분석하여 행성 운동의 세 법칙을 발견했다. 나중에 뉴턴이 만유인력 법칙으로 이 세 법칙을 모두 유도했다.

제1법칙 (궤도의 법칙): 모든 행성은 태양을 한 **초점(focus)** 으로 하는 **타원 (ellipse)** 궤도를 그린다.

제2법칙 (면적의 법칙): 태양과 행성을 잇는 선분은 같은 시간 동안 같은 면적을 쓸고 지나간다.

제3법칙 (주기의 법칙): 행성 주기의 제곱은 궤도 긴반지름의 세제곱에 비례한다.

제1법칙: 타원 궤도

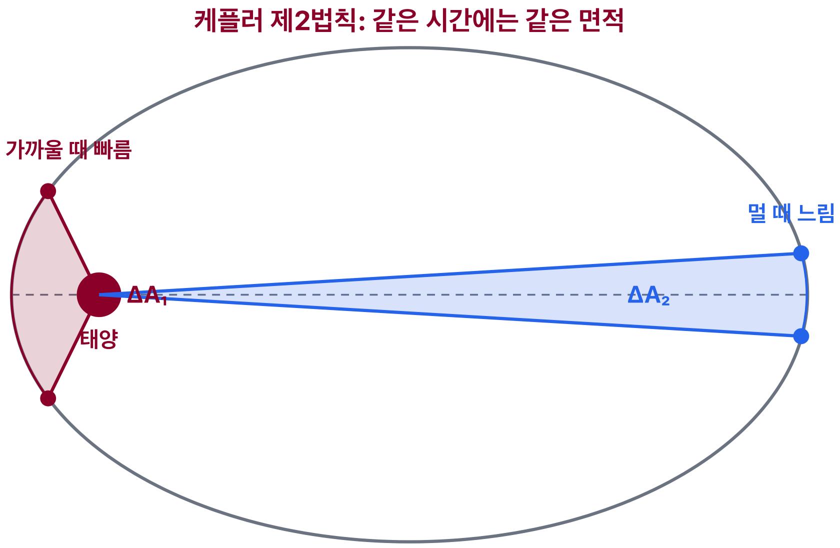


타원의 주요 요소:

- **긴반지름(semimajor axis)** a: 타원의 긴 축 절반
- **짧은반지름(semiminor axis)** b: 타원의 짧은 축 절반
- **이심률(eccentricity)** e: 타원의 찌그러진 정도 $(0 \leq e < 1)$
  - $e = 0$: 원
  - $e \to 1$: 매우 납작한 타원
- **근일점(perihelion)** $R_p = a(1 - e)$: 태양에 가장 가까운 점
- **원일점(aphelion)** $R_a = a(1 + e)$: 태양에서 가장 먼 점

> 지구 궤도의 이심률은 $e = 0.0167$로, 거의 원에 가깝다.

제2법칙: 면적 속도 일정



$\Delta A_1 = \Delta A_2$ for the same Δt

dA/dt = L/(2m) = 일정 ⇔ 각운동량 보존

태양과 행성을 잇는 선분이 시간 Δt 동안 쓸고 지나가는 면적 ΔA:

$$\Delta A \approx \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$$

면적 속도(areal velocity):

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \omega = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

제2법칙과 각운동량 보존

행성의 **각운동량(angular momentum)** 은:

$$L = mr^2\omega$$

따라서:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{일정}$$

케플러의 제2법칙은 각운동량 보존과 동치이다!

- 근일점에서: r이 작으면 ω가 커야 한다. 빠르게 움직인다
- 원일점에서: r이 크면 ω가 작아야 한다. 느리게 움직인다

제3법칙: 주기와 궤도 크기의 관계

원궤도(반지름 r)에서 유도하자. 중력 = 구심력:

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\omega^2 r = m\frac{4\pi^2}{T^2}r$$

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}r^3$$

타원 궤도에서는 r을 긴반지름 a로 대체:

$$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3}$$

같은 중심 천체(질량 M)를 도는 모든 궤도에 대해, T^2/a^3은 **일정** 하다.

태양계 행성의 케플러 제3법칙

행성	a (10^{10} m)	T (년)	T^2/a^3 (10^{-34} y^2/m^3)
수성	5.79	0.241	2.99
금성	10.8	0.615	3.00
지구	15.0	1.00	2.96
화성	22.8	1.88	2.98
목성	77.8	11.9	3.01
토성	143	29.5	2.98

T^2/a^3이 거의 일정함을 확인할 수 있다!

예제: 초대질량 블랙홀

우리 은하 중심의 별 S2는 보이지 않는 천체(궁수자리 A*) 주위를 주기 $T = 15.2$ 년, 긴반지름 $a = 1.43 \times 10^{14}$ m인 궤도로 공전한다. 이 천체의 질량은?

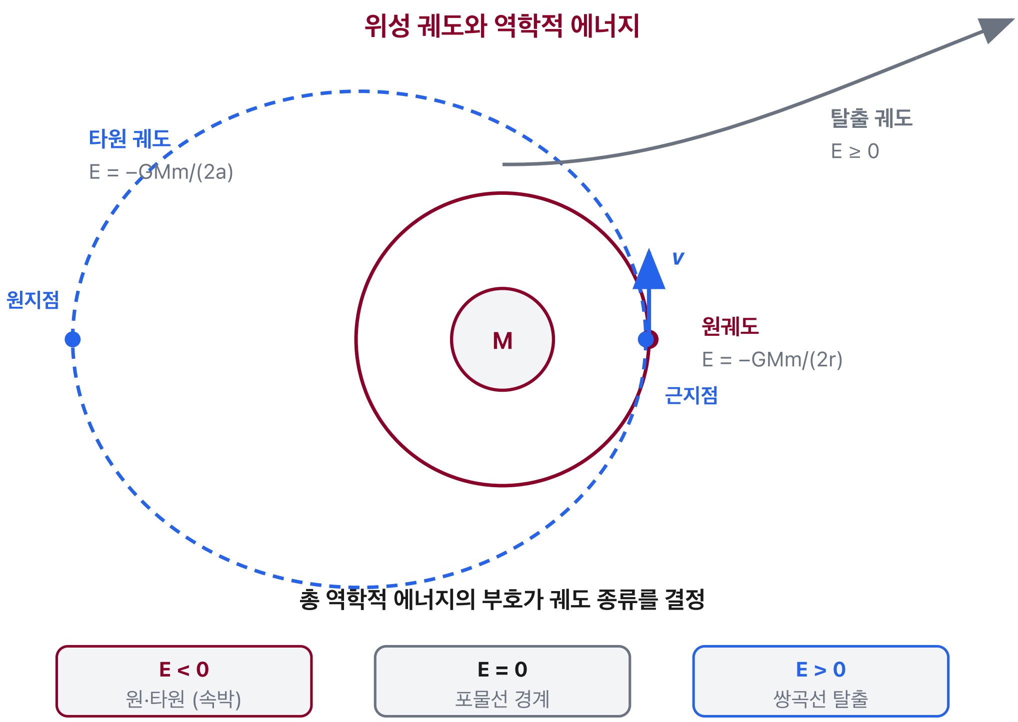
$$M = \frac{4\pi^2 a^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 (1.43 \times 10^{14})^3}{(6.67 \times 10^{-11})(15.2 \times 3.16 \times 10^7)^2} = 7.4 \times 10^{36} \text{ kg}$$

이것은 태양 질량($M_\odot = 1.99 \times 10^{30}$ kg)의 약 **370만 배** 다!

이렇게 작은 영역에 이만큼의 질량이 있으므로 → **초대질량 블랙홀 (supermassive black hole)** 이다. 2020년 노벨 물리학상은 블랙홀 형성의 일반상대성 예측으로 **로저 펜로즈(Penrose)** 가 절반, 궁수자리 A* 관측으로 **라인하르트 겐첼(Genzel)** 과 **안드레아 게즈(Ghez)** 가 나머지 절반을 공동 수상했다.

13.7 인공위성: 궤도와 에너지

원궤도에서의 에너지



반지름 r인 원궤도를 도는 질량 m인 위성의 에너지를 구하자.

운동에너지

중력 = 구심력에서:

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \implies v^2 = \frac{GM}{r}$$

운동에너지:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{GMm}{2r}$$

퍼텐셜에너지:

$$U = -\frac{GMm}{r}$$

역학적 에너지:

$$E = K + U = \frac{GMm}{2r} - \frac{GMm}{r} = -\frac{GMm}{2r}$$

궤도 에너지의 특성

원궤도에서의 중요한 관계:

$$K = -\frac{U}{2}, \quad E = -K = \frac{U}{2}$$

- $K > 0$ (항상 양수)
- $U < 0$ (항상 음수)
- $E < 0$. **속박 궤도(bound orbit)** 의 조건. $|E|$ 는 시스템을 무한대까지 분리하는 데 필요한 최소 에너지, 즉 **결합 에너지(binding energy)** 다.
- $|U| = 2K$. 퍼텐셜에너지의 크기는 운동에너지의 2배

타원 궤도에서는 r을 긴반지름 a로 대체:

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

역학적 에너지는 **긴반지름에만 의존** 하고, 이심률 e에는 무관하다!

궤도의 종류와 에너지

물체의 역학적 에너지 E에 따라 궤도의 종류가 결정된다:

에너지 조건	궤도 종류	이심률
$E < 0$	원	$e = 0$
$E < 0$	타원	$0 < e < 1$
$E = 0$	포물선 (탈출 경계)	$e = 1$
$E > 0$	쌍곡선 (탈출)	$e > 1$

- $E < 0$: 속박 궤도. 위성이 중심 천체 주위를 영원히 돈다
- $E = 0$: 정확히 탈출 속력으로 발사. 무한히 멀리 가서 속력이 0이 됨
- $E > 0$: 탈출 후에도 남은 속력이 있음

시뮬레이션: 중력 궤도 시뮬레이션

시뮬레이션: 궤도 역학 시뮬레이션

13.8 아인슈타인과 중력

일반 상대성 이론의 관점

뉴턴의 중력 이론은 대부분의 상황에서 정확하지만, 아인슈타인의 **일반 상대성 이론(general relativity, 1915)** 은 중력을 근본적으로 다르게 설명한다.

- **뉴턴:** 중력은 두 질량 사이의 **힘** 이다
- **아인슈타인:** 중력은 질량에 의한 **시공간의 곡률(curvature of spacetime)** 이다

일반 상대성 이론의 검증:

- **수성의 세차(precession of Mercury):** 뉴턴 이론 예측보다 매 세기 43"만큼 더 이동. 일반 상대성 이론이 정확히 설명
- **빛의 휨(bending of light):** 1919년 일식 관측에서 확인
- **중력파(gravitational waves):** 2015년 LIGO에서 최초 검출 (2017년 노벨상)
- **GPS 보정:** GPS 위성의 시계는 중력 시간 지연 효과를 보정해야 정확한 위치를 제공

Review & Summary

핵심 법칙과 공식

개념	공식
만유인력	$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$
중력 가속도	$a_g = \frac{GM}{r^2}$
구 내부 중력	$F = \frac{GmM}{R^3}r$
중력 퍼텐셜에너지	$U = -\frac{GMm}{r}$
탈출 속력	$v = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

케플러 법칙과 궤도 에너지

개념	공식
케플러 제2법칙	$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{일정}$
케플러 제3법칙	$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3$
원궤도 운동에너지	$K = \frac{GMm}{2r}$
원궤도 역학적 에너지	$E = -\frac{GMm}{2r}$
타원궤도 역학적 에너지	$E = -\frac{GMm}{2a}$

기억할 것:

- 만유인력은 항상 인력이며, r^2에 반비례한다
- 구각 정리: 균일한 구 내부에서 바깥 껍질은 힘을 작용하지 않는다
- 중력 퍼텐셜에너지는 항상 음수이고, r이 커질수록 0에 가까워진다
- 케플러 제2법칙 = 각운동량 보존
- 속박 궤도의 조건: $E < 0$