

# 12장: 평형과 탄성

Equilibrium and Elasticity

## 이번장에서 배울 내용

- **평형(equilibrium)** 의 조건: 알짜힘 = 0, 알짜 돌림힘 = 0
- **정적 평형(static equilibrium)**: 물체가 정지해 있고 회전하지 않는 상태
- **무게중심(center of gravity)** 과 안정성
- 평형 문제 풀이 전략과 예제
- **탄성(elasticity)**: 응력과 변형률의 관계
- **영률(Young's modulus)**, 전단 탄성률, 체적 탄성률

## 왜 평형이 중요한가?

건물, 다리, 크레인 — 이 모든 구조물은 **정적 평형** 상태에 있어야 안전하다.

서울 잠실의 **롯데월드타워** (555 m)는 지상에서 가장 높은 건물 중 하나다. 이 건물이 쓰러지지 않으려면, 모든 층에서 힘과 돌림힘의 균형이 맞아야 한다.

건설 현장의 **타워크레인**은 수십 톤의 하중을 들어올리면서도 넘어지지 않아야 한다. 이것이 가능한 이유는 크레인 설계자가 평형 조건을 정밀하게 적용했기 때문이다.

## 12.1 평형의 조건

물체가 **평형(equilibrium)** 상태에 있으려면 두 가지 조건을 만족해야 한다.

**병진 평형** (translational equilibrium):

$$\vec{F}_{\text{net}} = \sum \vec{F} = 0$$

**회전 평형** (rotational equilibrium):

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \sum \vec{\tau} = 0$$

두 조건을 모두 만족하면 물체의 선운동량과 각운동량이 변하지 않는다.

## 정적 평형 vs. 동적 평형

### 정적 평형(static equilibrium):

- $\vec{F}_{\text{net}} = 0, \vec{\tau}_{\text{net}} = 0$
- **추가 조건:**  $\vec{v} = 0, \vec{\omega} = 0$  (정지해 있고 회전하지 않음)

### 동적 평형:

- $\vec{F}_{\text{net}} = 0, \vec{\tau}_{\text{net}} = 0$
- 일정한 속도로 운동하거나 일정한 각속도로 회전

이 장에서는 주로 **정적 평형** 을 다룬다.

## 성분별 평형 조건

2차원 문제에서 평형 조건을 성분으로 쓰면:

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum \tau_z = 0$$

3개의 미지수를 구할 수 있는 **3개의 방정식** 이다.

**참고:** 돌림힘의 피벗(축)은 **어디든** 선택할 수 있다. 현명한 피벗 선택이 풀이를 단순하게 만든다!

## 12.2 무게중심

### 무게중심(center of gravity)이란?

중력은 물체의 모든 부분에 작용한다. 그러나 돌림힘 계산에서 중력은 **무게중심(center of gravity, cog)** 이라는 한 점에 집중된다고 생각할 수 있다.

$$x_{\text{cog}} = \frac{\sum m_i g_i x_i}{\sum m_i g_i}$$

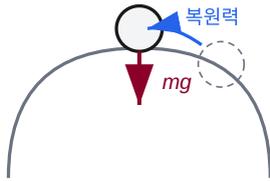
중력 가속도  $g$ 가 물체 전체에서 균일하면 ( $g_i = g$ ):

$$x_{\text{cog}} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = x_{\text{com}}$$

**무게중심 = 질량중심** (중력이 균일할 때)

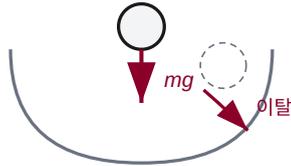
# 안정성(Stability)

안정 평형  
(Stable)



밀어도 되돌아옴

불안정 평형  
(Unstable)



조금만 밀면 떠남

중립 평형  
(Neutral)



어디서나 평형

## 안정 평형, 불안정 평형, 중립 평형

### 안정 평형(stable equilibrium):

- 살짝 밀어도 **복원력** 이 작용하여 원래 위치로 돌아온다
- 무게중심이 지지점 **아래** 에 있는 경우

### 불안정 평형(unstable equilibrium):

- 살짝 밀면 평형에서 **벗어나** 돌아오지 않는다
- 무게중심이 지지점 **위** 에 있고, 좁은 꼭대기에 놓인 경우

### 중립 평형(neutral equilibrium):

- 어떤 위치로 옮겨도 새로운 평형이 된다
- 평면 위의 공

**안정성의 핵심:** 무게중심이 **지지 기저면(base of support)** 위에 있는 한, 물체는 안정하다. 무게중심의 수직선이 기저면 밖으로 나가면 넘어진다.

## 12.3 평형 문제 풀이 전략

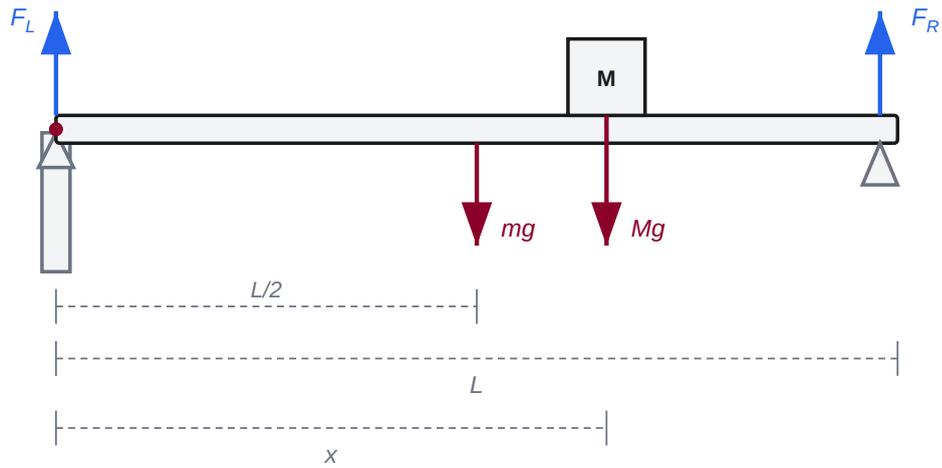
### 풀이 순서

1. **물체 선택**: 평형 상태에 있는 물체를 하나 선택한다
2. **자유 물체 다이어그램(FBD)** 을 그린다: 모든 힘을 표시
3. **좌표축 설정**:  $x, y$  축을 정한다
4. **피벗 선택**: 돌림힘 방정식에서 미지력이 사라지도록 피벗을 선택
5. **방정식 세우기**:  $\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum \tau = 0$
6. **풀기**: 미지수를 구한다

**팁**: 피벗을 미지력의 작용점에 놓으면, 그 힘의 돌림힘이 0이 되어 방정식이 간단해진다!

## 12.4 예제: 보 위의 블록

보 위의 블록 (자유 물체 다이어그램)



## 보 위의 블록: 풀이

균일한 보(질량  $m$ , 길이  $L$ )가 양쪽 끝에서 지지되고, 위치  $x$ 에 블록(질량  $M$ )이 놓여 있다.

$\sum \tau = 0$  (왼쪽 끝 피벗):

$$F_R \cdot L - mg \cdot \frac{L}{2} - Mg \cdot x = 0$$

$$F_R = \frac{mg}{2} + \frac{Mg \cdot x}{L}$$

$\sum F_y = 0$ :

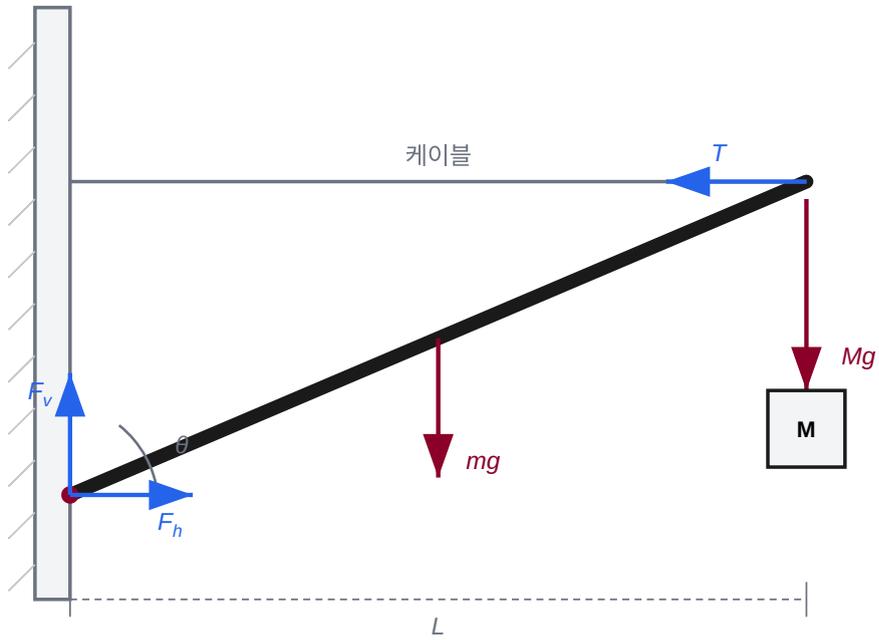
$$F_L + F_R - mg - Mg = 0$$

$$F_L = (m + M)g - F_R = \frac{mg}{2} + Mg \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

블록이 오른쪽으로 갈수록  $F_R$  증가,  $F_L$  감소!

# 12.5 예제: 크레인 붐

크레인 붐 (자유 물체 다이어그램)



## 크레인 붐: 풀이

질량  $m$ , 길이  $L$ 인 균일한 붐이 각도  $\theta$ 로 벽에 힌지 연결되어 있다. 끝에 질량  $M$ 의 하중이 매달려 있고, 수평 케이블이 붐의 끝과 벽을 연결한다.

$\sum \tau = 0$  (힌지 피벗):

$$T \cdot L \sin \theta - mg \cdot \frac{L}{2} \cos \theta - Mg \cdot L \cos \theta = 0$$

$$T = \frac{(m/2 + M)g \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{(m/2 + M)g}{\tan \theta}$$

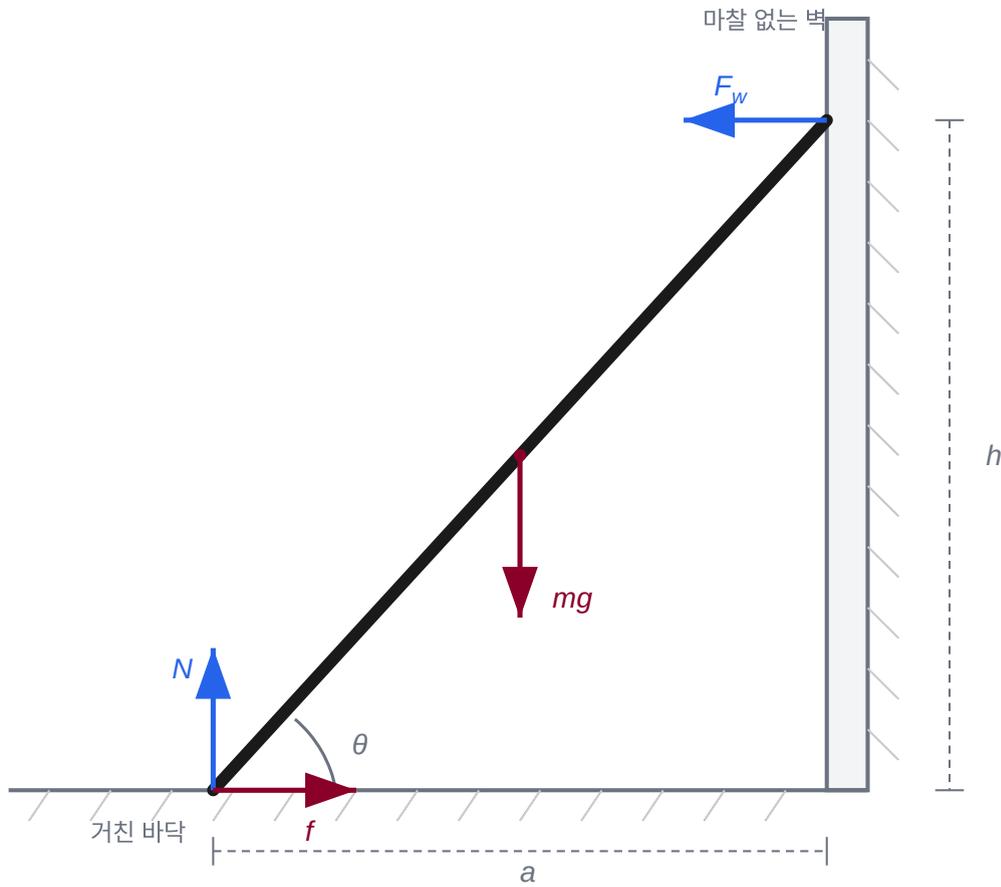
$\sum F_x = 0: F_h = T$

$\sum F_y = 0: F_v = (m + M)g$

$\theta$ 가 작아질수록 (붐이 수평에 가까워질수록) 케이블 장력  $T$ 가 급격히 증가한다!

## 12.6 예제: 사다리 문제

사다리 문제 (자유 물체 다이어그램)



## 사다리 문제: 풀이

질량  $m$ , 길이  $L$ 인 균일한 사다리가 각도  $\theta$ 로 마찰 없는 벽에 기대어 있다. 바닥의 정지마찰계수는  $\mu_s$ .

$\sum \tau = 0$  (바닥 접촉점 피벗):

$$F_w \cdot L \sin \theta - mg \cdot \frac{L}{2} \cos \theta = 0$$

$$F_w = \frac{mg \cos \theta}{2 \sin \theta} = \frac{mg}{2 \tan \theta}$$

$$\sum F_x = 0: f = F_w$$

$$\sum F_y = 0: N = mg$$

## 사다리가 미끄러지지 않을 조건

마찰력이 최대 정지마찰력보다 작아야 한다:

$$f \leq \mu_s N$$

$$\frac{mg}{2 \tan \theta} \leq \mu_s \cdot mg$$

$$\frac{1}{2 \tan \theta} \leq \mu_s$$

$$\tan \theta \geq \frac{1}{2\mu_s}$$

$$\theta \geq \arctan \left( \frac{1}{2\mu_s} \right)$$

사다리 각도가 이 최소 각도보다 작으면 미끄러진다!

시뮬레이션: 사다리 평형 시뮬레이션

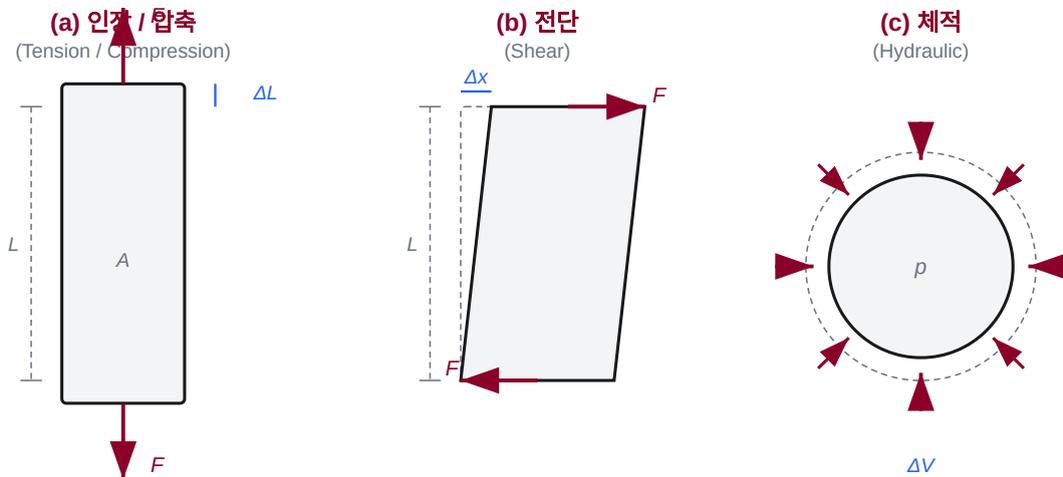
# 12.7 탄성(Elasticity)

## 탄성이란?

실제 물체는 완전히 강체가 아니다. 힘을 가하면 **변형 (deformation)** 이 생긴다.

- **탄성 변형**: 힘을 제거하면 원래 모양으로 돌아옴
- **소성 변형**: 힘을 제거해도 영구적으로 변형됨
- **파단**: 변형이 한계를 넘으면 부서짐

세 가지 기본 변형:



## 12.8 응력과 변형률

### 응력(Stress)과 변형률(Strain)

응력(stress)  $\sigma$ : 단위 면적당 힘

$$\sigma = \frac{F}{A}$$

단위: Pa (= N/m<sup>2</sup>), 보통 MPa나 GPa 사용

변형률(strain)  $\varepsilon$ : 변형의 상대적 크기 (무차원)

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

## 인장과 압축 (Tension & Compression)

봉의 양 끝을 당기거나 누를 때:

응력:  $\sigma = \frac{F}{A}$

변형률:  $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$

영률(Young's modulus)  $E$ :

$$\sigma = E\varepsilon$$

$$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L}$$

$$\Delta L = \frac{FL}{AE}$$

$E$ 가 클수록 같은 힘에 대해 덜 변형된다 (더 뻣뻣하다).

## 주요 재료의 영률

재료	영률 $E$ (GPa)	항복 응력 $S_y$ (MPa)
강철	200	250
알루미늄	70	95
구리	120	70
콘크리트	30	20 (압축)
뼈	18	120
고무	0.01	5

**롯데월드타워** 는 주로 강철과 콘크리트로 지어졌다. 강철은 인장에 강하고, 콘크리트는 압축에 강하다. 이 둘을 결합한 **철근콘크리트** 가 현대 건축의 핵심이다.

## 12.9 전단 탄성률과 체적 탄성률

### 전단(Shear)

물체의 면에 평행한 힘이 작용할 때:

전단 응력:  $\sigma_s = \frac{F}{A}$

전단 변형률:  $\varepsilon_s = \frac{\Delta x}{L}$

전단 탄성률(shear modulus)  $G$ :

$$\sigma_s = G\varepsilon_s \quad \Rightarrow \quad \frac{F}{A} = G\frac{\Delta x}{L}$$

## 체적(Hydraulic / Bulk)

모든 방향에서 균일한 압력이 작용할 때:

체적 응력:  $\Delta p$  (압력 변화)

체적 변형률:  $\frac{\Delta V}{V}$

체적 탄성률(bulk modulus)  $B$ :

$$\Delta p = -B \frac{\Delta V}{V}$$

음수 부호: 압력이 증가하면 부피가 감소하므로.

## 세 가지 탄성률 비교

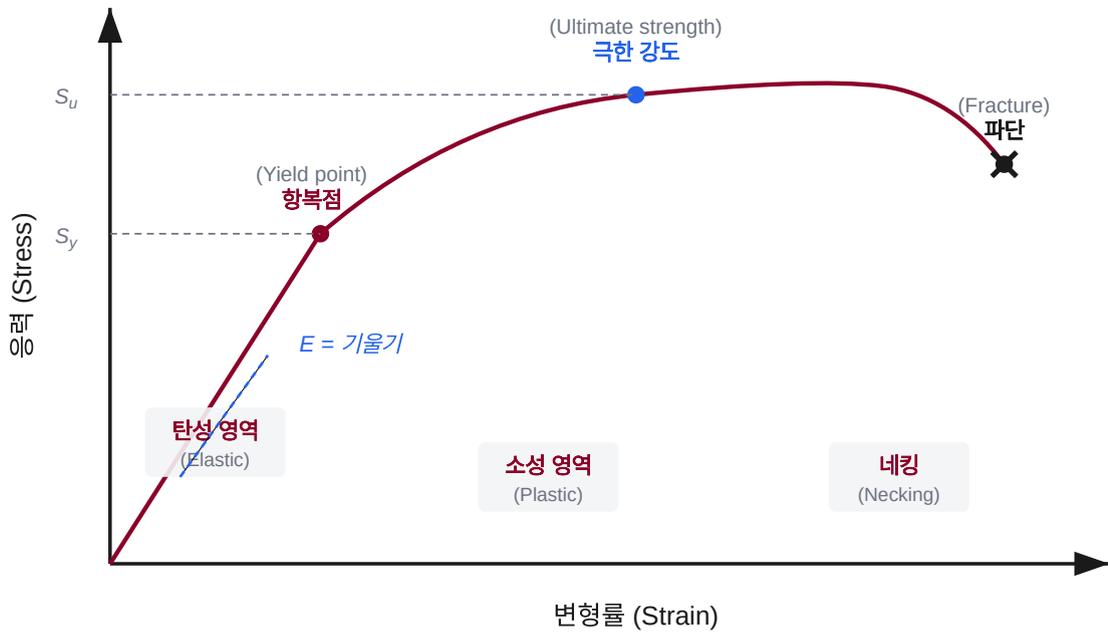
변형 유형	응력	변형률	탄성률
인장/압축	$F/A$	$\Delta L/L$	영률 $E$
전단	$F/A$	$\Delta x/L$	전단 탄성률 $G$
체적	$\Delta p$	$\Delta V/V$	체적 탄성률 $B$

세 경우 모두 **선형 관계**: 응력  $\propto$  변형률 (탄성 한계 내에서)

이것은 훅 법칙  $F = kx$ 의 일반화이다!

# 12.10 응력-변형률 곡선

응력-변형률 곡선 (Stress-Strain Curve)



## 응력-변형률 곡선의 영역

### 1. 탄성 영역 (Elastic region):

- 응력-변형률이 **선형** 관계 ( $\sigma = E\varepsilon$ )
- 힘을 제거하면 원래로 돌아옴
- 기울기 = 영률  $E$

### 2. 항복점 (Yield point):

- 이 응력( $S_y$ )을 넘으면 영구 변형 시작

### 3. 소성 영역 (Plastic region):

- 영구 변형 발생, 힘을 제거해도 원래로 돌아가지 않음

### 4. 극한 강도 (Ultimate strength, $S_u$ ):

- 재료가 버틸 수 있는 최대 응력

### 5. 파단 (Fracture):

- 재료가 끊어짐

시뮬레이션: 응력-변형률 곡선 시뮬레이션

# Review & Summary

## 평형 조건

조건	수식
병진 평형	$\vec{F}_{\text{net}} = \sum \vec{F} = 0$
회전 평형	$\vec{\tau}_{\text{net}} = \sum \vec{\tau} = 0$
정적 평형 (추가)	$\vec{v} = 0, \vec{\omega} = 0$

# 탄성

개념	공식
영률 (인장/압축)	$\frac{F}{A} = E \frac{\Delta L}{L}$
전단 탄성률	$\frac{F}{A} = G \frac{\Delta x}{L}$
체적 탄성률	$\Delta p = -B \frac{\Delta V}{V}$

## 기억할 것:

- 평형 문제의 핵심은 **자유 물체 다이어그램** 과 **현명한 피벗 선택**
- 돌림힘의 피벗은 어디든 자유롭게 선택할 수 있다
- 무게중심이 지지 기저면 안에 있으면 안정하다
- 응력-변형률 관계는 훅 법칙의 일반화
- 탄성 한계를 넘으면 영구 변형이 생긴다