11장: 구름 운동, 돌림힘, 각운동량

Rolling, Torque, and Angular Momentum

이번 장에서 배울 내용

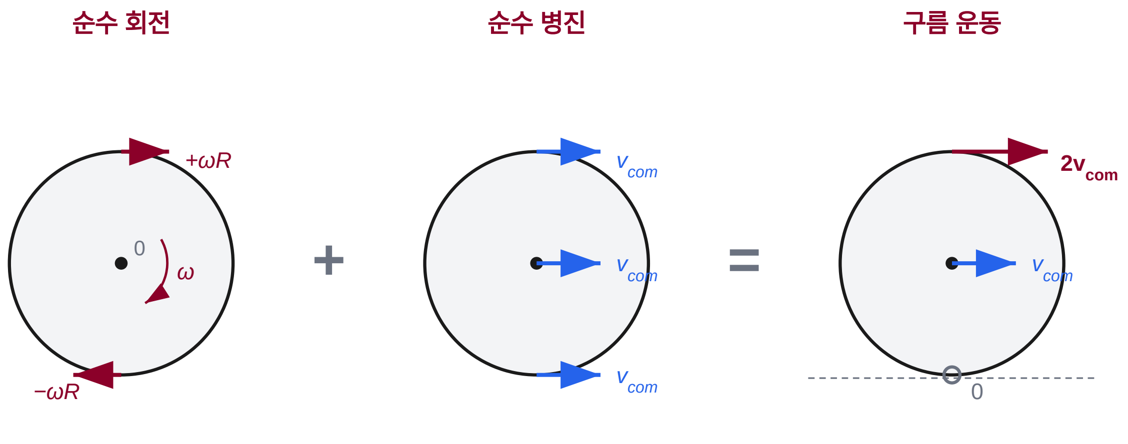
- **구름 운동(rolling)**: 병진 + 회전의 결합
- **구름 운동의 에너지** 와 빗면 위의 구름 운동
- **돌림힘 벡터(torque vector)**: $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
- **각운동량(angular momentum)**: $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$, $\vec{L} = I\vec{\omega}$
- **각운동량 보존**: 피겨 스케이팅, 다이빙
- **세차운동(precession)**: 자이로스코프

11.1 구름 운동

구름 = 병진 + 회전

자전거 바퀴, 볼링공, 축구공 — 일상에서 흔히 보는 운동이다.

구름 운동(rolling) 은 **순수 병진(translation)** 과 **순수 회전(rotation)** 의 결합이다.



구름 조건: $v_{com} = \omega R$ (접촉점 속도 = 0)

구름 조건

미끄러짐 없는 구름 운동의 핵심 조건:

$$v_{\text{com}} = \omega R$$

여기서 v_{com}은 질량 중심의 속력, ω는 각속력, R은 반지름이다.

물리적 의미: 접촉점의 속도가 0이다!

- 접촉점 (바닥): $v_{\text{com}} - \omega R = 0$
- 꼭대기: $v_{\text{com}} + \omega R = 2v_{\text{com}}$

양변을 시간 미분하면 가속도 관계도 얻는다:

$$a_{\text{com}} = \alpha R$$

구름 운동의 운동에너지

구름 운동의 전체 운동에너지:

$$K = \frac{1}{2} I_{\text{com}} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{\text{com}}^2$$

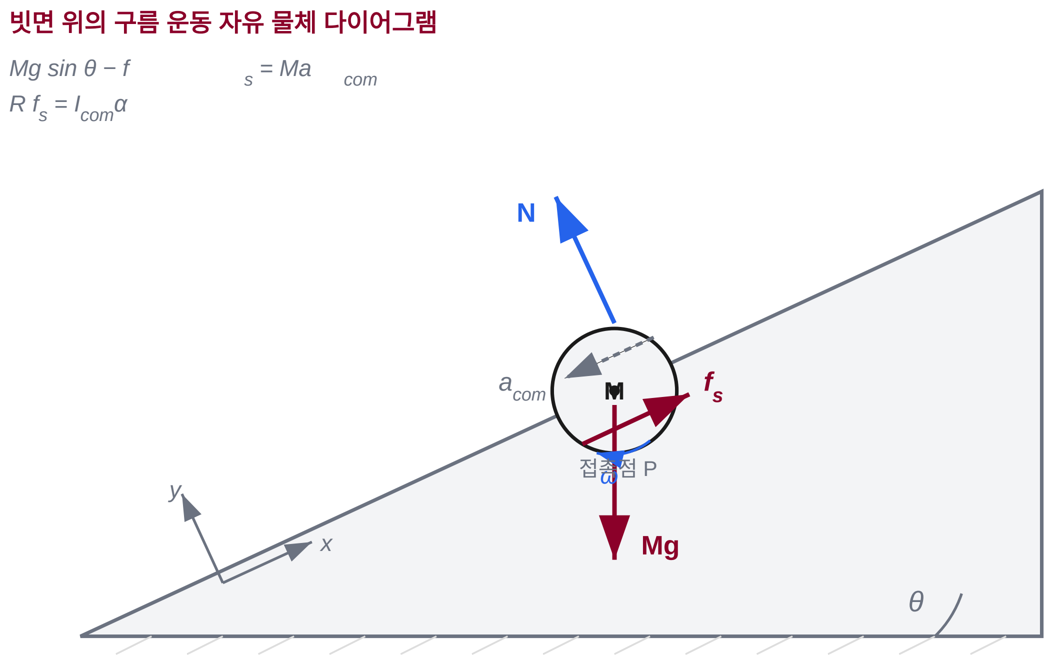
- 첫째 항: **회전 운동에너지** (질량 중심 둘레의 회전)
- 둘째 항: **병진 운동에너지** (질량 중심의 이동)

$v_{\text{com}} = \omega R$을 대입하면:

$$K = \frac{1}{2} I_{\text{com}} \frac{v_{\text{com}}^2}{R^2} + \frac{1}{2} M v_{\text{com}}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{I_{\text{com}}}{R^2} + M \right) v_{\text{com}}^2$$

11.2 빗면 위의 구름 운동

자유 물체 다이어그램



빗면 아래로 구르는 물체에 작용하는 힘: 중력 Mg, 수직항력 N, 정지 마찰력 f_s

운동 방정식

빗면 방향 (x축):

$$Mg\sin\theta - f_s = Ma_{\text{com}}$$

회전 (질량 중심에 대한 돌림힘):

$$Rf_s = I_{\text{com}}\alpha$$

구름 조건 $a_{\text{com}} = \alpha R$을 사용하면:

$$f_s = \frac{I_{\text{com}}a_{\text{com}}}{R^2}$$

대입하면:

$$Mg\sin\theta - \frac{I_{\text{com}}a_{\text{com}}}{R^2} = Ma_{\text{com}}$$

빗면 가속도

$$a_{\text{com}} = \frac{g \sin\theta}{1 + I_{\text{com}}/MR^2}$$

$c = I_{\text{com}}/MR^2$으로 놓으면:

$$a_{\text{com}} = \frac{g \sin\theta}{1 + c}$$

물체	I_{com}	c	a_{com}
속이 빈 원통 (링)	MR^2	1	$\frac{1}{2} g \sin\theta$
속이 찬 원판	$\frac{1}{2} MR^2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3} g \sin\theta$
속이 찬 구	$\frac{2}{5} MR^2$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{7} g \sin\theta$

누가 먼저 도착할까?

c가 작을수록 (관성 모멘트가 작을수록) 가속도가 크다.

순서: 구 > 원판 > 링 (구가 가장 빨리 도착!)

핵심: **질량과 반지름에 무관** — 오직 질량 분포(관성 모멘트의 형태)만 중요하다.

구가 가장 빠른 이유: 회전에 소비하는 에너지 비율이 가장 작기 때문이다.

시뮬레이션: 구름 운동 경주 시뮬레이션

요요(Yo-yo)

요요는 빗면 위의 구름 운동의 특수한 경우다!

- 실이 감긴 축의 반지름 R_0이 "빗면" 역할
- "빗면 각도" $\theta = 90^\circ$ $(\sin\theta = 1)$

요요의 가속도:

$$a_{\mathrm{com}} = \frac{g}{1 + I_{\mathrm{com}}/MR_0^2}$$

실이 감긴 축의 반지름 R_0이 작을수록 → I_{com}/MR_0^2이 커지므로 → 가속도가 작아진다 (천천히 내려간다).

11.3 돌림힘 벡터

벡터곱 복습

돌림힘을 벡터로 정의하려면 **벡터곱(cross product)** 이 필요하다.

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

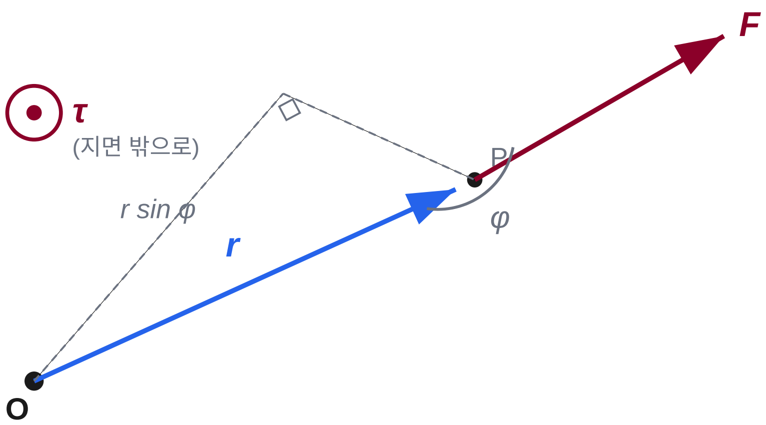
- 크기: $|\vec{c}| = ab\sin\phi$ (ϕ는 $\vec{a}$와 $\vec{b}$ 사이의 각)
- 방향: **오른손 법칙** — $\vec{a}$에서 $\vec{b}$로 감아쥐면 엄지 방향

성질:

- $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (교환 불가!)
- $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

돌림힘의 벡터 정의

돌림힘 벡터: τ = r × F



τ = r × F, |τ| = rF sin φ
방향: 오른손 법칙 (r에서 F로 감아쥐는 방향)

원점 O에서 힘의 작용점까지의 위치 벡터가 $\vec{r}$이고, 힘이 $\vec{F}$일 때:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

크기: $|\vec{\tau}| = rF\sin\phi$

돌림힘의 의미

$$\tau = rF\sin\phi = r_\perp F = rF_\perp$$

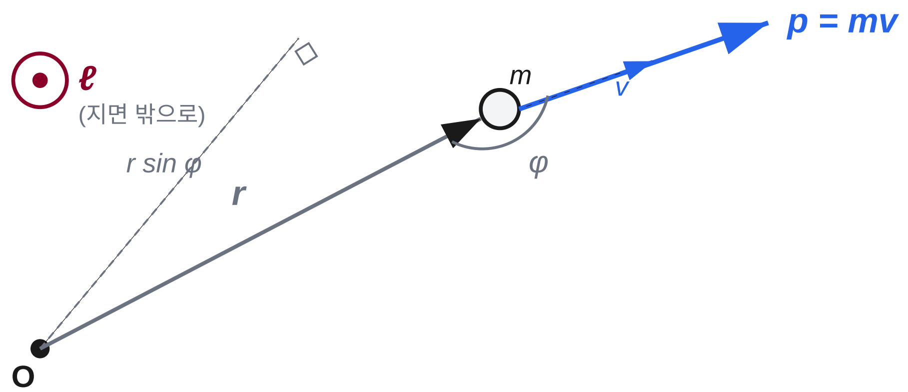
- $r_\perp = r\sin\phi$: **모멘트 팔(moment arm)** — 회전축에서 힘의 작용선까지의 수직 거리
- $F_\perp = F\sin\phi$: 회전을 일으키는 힘의 **접선 성분**

돌림힘은 **회전 운동의 원인** 이다 — 힘이 병진 운동의 원인인 것처럼.

11.4 각운동량

입자의 각운동량

각운동량: ℓ = r × p



$\boldsymbol{\ell} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$

$|\ell| = rmv \sin\varphi = r_\perp mv$

원점 O에 대한 입자의 **각운동량(angular momentum)** :

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

각운동량의 크기

$$\ell = rmv\sin\phi = r_\perp mv = rmv_\perp$$

- ϕ는 $\vec{r}$과 $\vec{v}$ 사이의 각도
- $r_\perp = r\sin\phi$: 직선 운동 경로까지의 수직 거리

단위: $\mathrm{kg \cdot m^2/s}$

원운동하는 입자의 경우 ($\phi = 90^\circ$):

$$\ell = rmv = mr^2\omega$$

회전의 뉴턴 제2법칙

병진: $\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{p}}{dt}$

이와 유사하게, **회전** 에서:

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{\ell}}{dt}$$

입자에 작용하는 알짜 돌림힘 = 각운동량의 시간 변화율

증명: $\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$를 시간 미분하면

$$\frac{d\vec{\ell}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{0} + \vec{\tau} = \vec{\tau}$$

강체의 각운동량

고정축을 중심으로 회전하는 강체의 각운동량:

$$L = \sum_i \ell_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = I\omega$$

$$\boxed{L = I\omega}$$

회전의 뉴턴 제2법칙 (강체):

$$\tau_{\text{net}} = \frac{dL}{dt} = I\alpha$$

이것은 10장에서 배운 $\tau_{\text{net}} = I\alpha$와 같다!

11.5 각운동량 보존

보존 법칙

만약 계에 작용하는 **알짜 외부 돌림힘이 0** 이면:

$$\tau_{\text{net, ext}} = \frac{dL}{dt} = 0$$

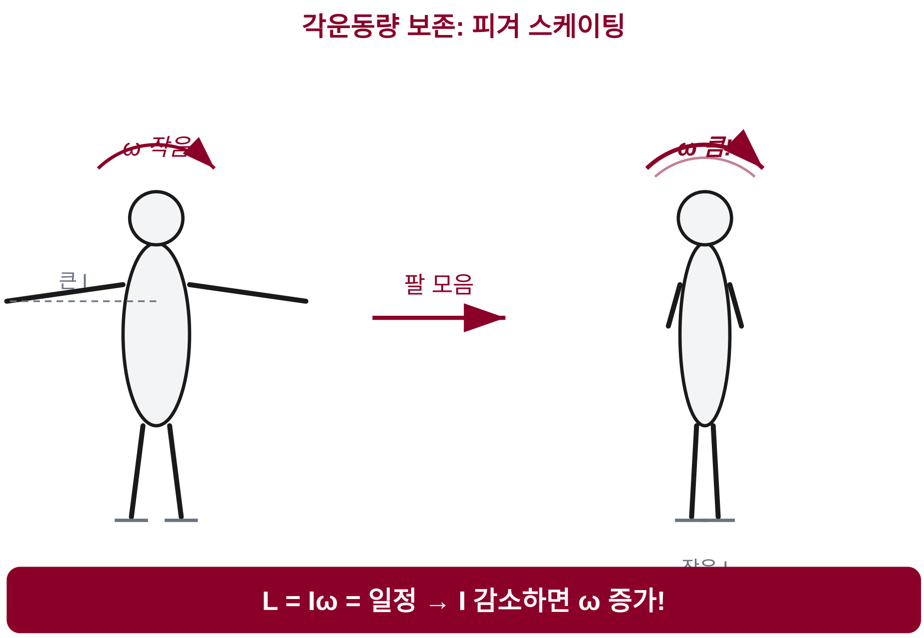
따라서:

$$\boxed{L = I\omega = \text{일정}}$$

$$I_i\omega_i = I_f\omega_f$$

이것은 선운동량 보존 ($\vec{F}_{\text{net}} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \text{const}$)의 회전 버전이다.

피겨 스케이팅: 각운동량 보존의 대표적 예



김연아 선수의 스핀을 떠올려 보자:

- 팔을 벌린 상태: I 크고 → ω 작음 (느린 회전)
- 팔을 모은 상태: I 작고 → ω 큼 (빠른 회전)

외부 돌림힘이 거의 없으므로 $L = I\omega$가 보존된다!

다이빙과 체조

다이빙 선수가 공중에서 몸을 웅크리면:

- 관성 모멘트 I가 감소
- 각속력 ω가 증가 → 빠르게 회전
- 입수 전에 몸을 펴면 → I 증가, ω 감소 → 안정적 입수

핵심: 외부 돌림힘 없이도 자신의 몸 형태를 바꿔서 회전 속도를 조절할 수 있다.

같은 원리가 우주 공간에서 위성의 자세 제어에도 사용된다 (반작용 바퀴, reaction wheel).

시뮬레이션: 각운동량 보존 시뮬레이션

예제: 회전하는 학생

질량 $M = 5.0$ kg, 반지름 $R = 0.50$ m인 회전 원판 위에 학생이 서 있다. 양손에 각각 $m = 2.0$ kg의 아령을 들고 $r_i = 0.80$ m에서 팔을 벌린 채 $\omega_i = 3.0$ rad/s로 회전 중이다.

팔을 모아 $r_f = 0.20$ m으로 줄이면 ω_f는?

$$I_i = \frac{1}{2}MR^2 + 2mr_i^2 = \frac{1}{2}(5.0)(0.50)^2 + 2(2.0)(0.80)^2 = 3.185 \text{ kg·m}^2$$

$$I_f = \frac{1}{2}MR^2 + 2mr_f^2 = \frac{1}{2}(5.0)(0.50)^2 + 2(2.0)(0.20)^2 = 0.785 \text{ kg·m}^2$$

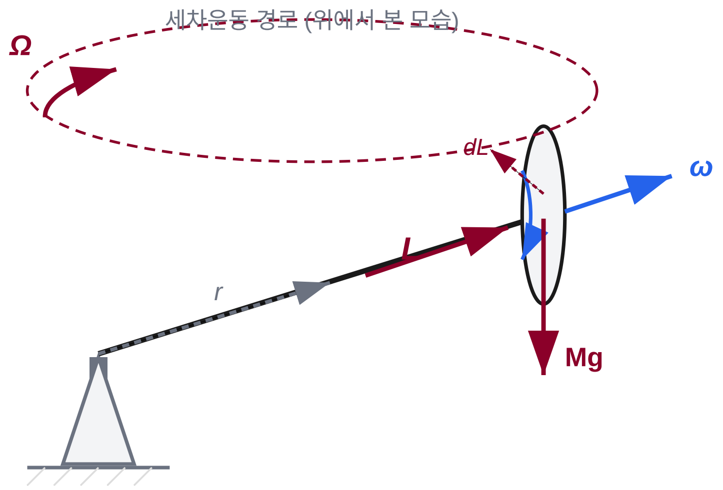
$$\omega_f = \frac{I_i}{I_f}\omega_i = \frac{3.185}{0.785}(3.0) = 12.2 \text{ rad/s}$$

관성 모멘트가 약 4배 줄면, 각속력은 약 4배 증가!

11.6 세차운동

자이로스코프의 세차운동

자이로스코프 세차운동 (Precession)



τ = dL/dt → L이 방향을 바꿈 (크기는 유지)

세차 각속도: Ω = Mgr / (Iω)

빠르게 회전하는 팽이가 쓰러지지 않고 빙글빙글 도는 현상 — **세차운동 (precession)** 이다.

세차운동의 물리

자이로스코프에 작용하는 돌림힘:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times M\vec{g}$$

이 돌림힘은 각운동량 $\vec{L}$의 **방향** 을 바꾼다 (크기는 유지):

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

dL은 $\vec{L}$에 수직 → $\vec{L}$이 원뿔 위를 회전한다.

세차 각속도

$$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega}$$

- Ω: 세차 각속도 (축이 도는 속도)
- M: 자이로스코프 질량
- r: 지지점에서 질량 중심까지의 거리
- I: 회전축에 대한 관성 모멘트
- ω: 자전 각속도

놀라운 점: 자전 속도 ω가 **빠를수록** 세차 속도 Ω가 **느려진다** !

자전거 바퀴가 빠르게 돌 때 쓰러지지 않는 것도 같은 원리다.

Review & Summary

핵심 개념

개념	공식
구름 조건	$v_{\text{com}} = \omega R$
구름 운동에너지	$K = \frac{1}{2}I_{\text{com}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{com}}^2$
빗면 가속도	$a_{\text{com}} = \frac{g\sin\theta}{1+I_{\text{com}}/MR^2}$
돌림힘 벡터	$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$
각운동량 (입자)	$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p}$
각운동량 (강체)	$L = I\omega$

핵심 개념 (계속)

개념	공식
회전의 뉴턴 2법칙	$\vec{\tau}_{\text{net}} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
각운동량 보존	$I_i\omega_i = I_f\omega_f$ (외부 돌림힘 = 0)
세차 각속도	$\Omega = \frac{Mgr}{I\omega}$

기억할 것:

- 구름 운동은 **병진 + 회전** 의 조합이다
- 빗면 경주에서 **질량 분포** 가 중요하다 (질량·반지름은 무관)
- **각운동량은 보존량** 이다 (외부 돌림힘이 없을 때)
- 돌림힘은 $\vec{L}$의 **방향** 을 바꿀 수 있다 (세차운동)