9장: 질량중심과 선운동량

Center of Mass and Linear Momentum

이번 장에서 배울 내용

- **질량중심(center of mass)**: 입자계의 대표 위치
- **선운동량(linear momentum)**: $\vec{p} = m\vec{v}$
- **충격량(impulse)** 과 **충격량-운동량 정리**
- **운동량 보존 법칙**: 외력이 없으면 $\vec{p}$ 보존
- **탄성 충돌** 과 **비탄성 충돌** (1차원, 2차원)
- **로켓 추진**: 변하는 질량 문제

왜 운동량을 배우나?

지금까지는 **하나의 입자** 에 대한 운동을 다뤘다.

하지만 현실에서는 여러 물체가 서로 상호작용한다:

- **당구** 에서 공끼리 부딪힐 때
- **자동차 사고** 에서 두 차량이 충돌할 때
- **누리호** 로켓이 연료를 분사하며 가속할 때

이런 문제를 다루려면 **운동량(momentum)** 이라는 새로운 물리량이 필요하다.

9.1 질량중심

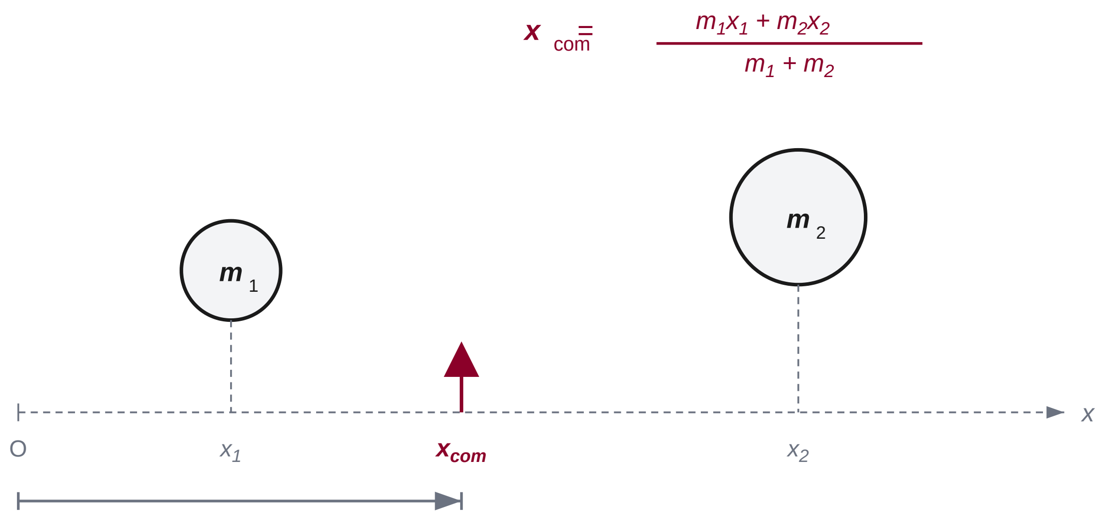
질량중심이란?

여러 입자로 이루어진 계(system)에는 특별한 점이 있다:

> 입자계 전체의 운동을 대표하는 점 — **질량중심(center of mass, com)**

공중에서 회전하며 날아가는 야구 배트를 생각해 보자. 배트의 각 부분은 복잡하게 움직이지만, **질량중심** 은 포물선 궤적을 따른다!

두 입자의 질량중심



질량 m_1, m_2인 두 입자가 x_1, x_2에 있을 때:

$$x_{\text{com}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

질량이 큰 쪽에 가까운 곳에 질량중심이 위치한다.

n개 입자의 질량중심

n개 입자로 일반화하면:

$$x_{\text{com}} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i x_i$$

여기서 $M = \sum m_i$는 전체 질량이다.

3차원으로 확장하면:

$$\vec{r}_{\text{com}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i$$

각 성분별로:

$$x_{\text{com}} = \frac{1}{M} \sum m_i x_i, \quad y_{\text{com}} = \frac{1}{M} \sum m_i y_i, \quad z_{\text{com}} = \frac{1}{M} \sum m_i z_i$$

연속 물체의 질량중심

질량이 연속적으로 분포한 물체의 경우, 합을 적분으로 바꾼다:

$$\vec{r}_{\text{com}} = \frac{1}{M} \int \vec{r}\, dm$$

각 성분:

$$x_{\text{com}} = \frac{1}{M} \int x\, dm, \quad y_{\text{com}} = \frac{1}{M} \int y\, dm$$

밀도가 균일하면 $dm = \rho\, dV$로 바꿀 수 있다.

대칭 을 활용하면 계산이 쉬워진다: 대칭축이 있으면 질량중심은 그 축 위에 있다.

9.2 입자계에 대한 뉴턴 제2법칙

질량중심의 운동

질량중심의 위치를 시간으로 미분하면:

$$M\vec{v}_{\text{com}} = \sum m_i \vec{v}_i$$

한 번 더 미분하면:

$$M\vec{a}_{\text{com}} = \sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i$$

내부 힘(작용·반작용)은 서로 상쇄되므로:

$$\vec{F}_{\text{net, ext}} = M\vec{a}_{\text{com}}$$

> **입자계에 작용하는 알짜 외력** 은 전체 질량이 질량중심에 모여 있는 하나의 입자에 작용하는 것과 같다!

질량중심 운동의 의미

복잡한 입자계도 **질량중심** 에 주목하면 단순해진다:

- 불꽃놀이 폭죽이 공중에서 터져도, 파편들의 질량중심은 포물선을 유지한다
- 피겨 스케이팅 선수가 회전해도 질량중심의 궤적은 뉴턴 법칙을 따른다

외력이 0이면:

$$\vec{a}_{\mathrm{com}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{\mathrm{com}} = \text{일정}$$

9.3 선운동량

선운동량의 정의

질량 m, 속도 $\vec{v}$인 입자의 **선운동량(linear momentum)**:

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

- **벡터** 이다 (방향은 속도와 같다)
- 단위: $\mathrm{kg \cdot m/s}$
- 속력이 같더라도 질량이 크면 운동량이 크다

뉴턴 제2법칙과 운동량

뉴턴 제2법칙을 운동량으로 다시 쓰면:

$$\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

> **알짜힘 = 운동량의 시간 변화율**

사실 이것이 뉴턴이 원래 표현한 제2법칙의 형태다!

질량이 변하는 문제(로켓 등)에서는 이 형태가 더 일반적이다.

입자계의 선운동량

n개 입자로 이루어진 계의 총 운동량:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i = M\vec{v}_{\text{com}}$$

이를 미분하면:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_{\text{com}} = \vec{F}_{\text{net, ext}}$$

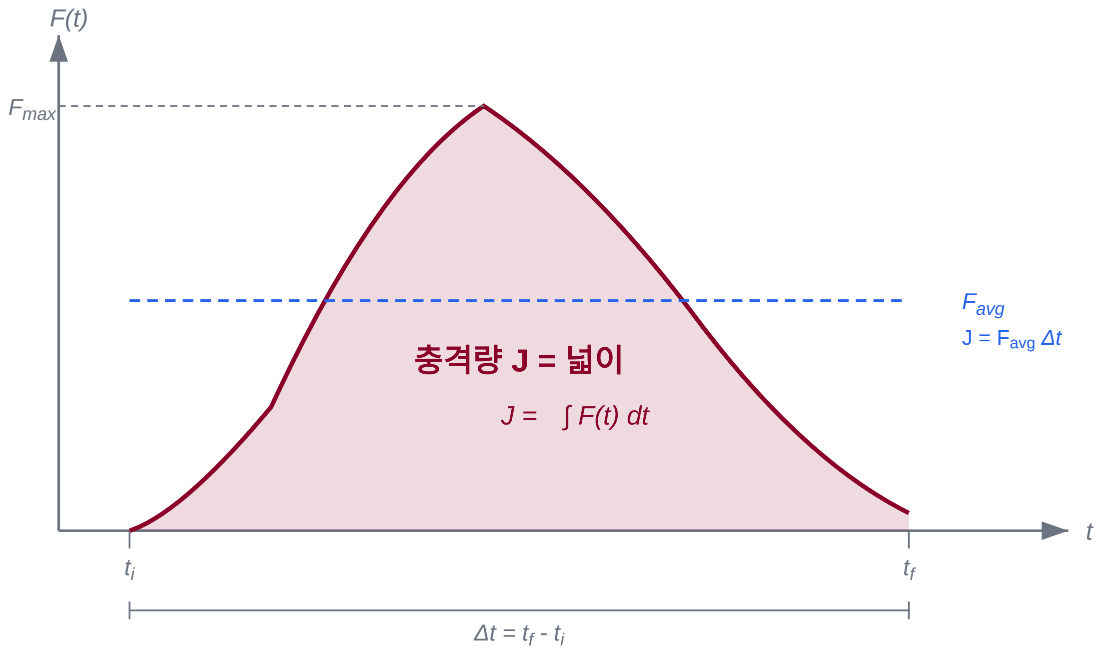
외력이 없으면 ($\vec{F}_{\text{net, ext}} = 0$):

$$\vec{P} = \text{일정} \quad (\text{운동량 보존})$$

9.4 충돌과 충격량

충격량(impulse)이란?

야구 방망이로 공을 칠 때, 매우 짧은 시간 동안 매우 큰 힘이 작용한다.



충격량(impulse) $\vec{J}$는 힘의 시간 적분:

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t)\, dt$$

충격량-운동량 정리

뉴턴 제2법칙 $\vec{F} = d\vec{p}/dt$를 적분하면:

$$\vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}\, dt = \int_{p_i}^{p_f} d\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta\vec{p}$$

> **충격량 = 운동량의 변화**

$$\vec{J} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$$

이것을 **충격량-운동량 정리(impulse-momentum theorem)** 라 한다.

평균 힘

충격량은 **평균 힘** 으로도 표현할 수 있다:

$$\vec{J} = \vec{F}_{\text{avg}} \Delta t$$

여기서 $\Delta t = t_f - t_i$는 충돌 시간이다.

같은 충격량이라도:

- Δt가 **짧으면** → F_{avg}가 **크다** (딱딱한 바닥)
- Δt가 **길면** → F_{avg}가 **작다** (에어백, 매트)

> **자동차 에어백** 은 충돌 시간을 늘려서 평균 힘을 줄이는 장치다!

9.5 운동량 보존 법칙

유도

두 입자가 서로 충돌할 때, 외부에서 작용하는 힘이 없다면:

$$\vec{F}_{\text{net, ext}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

따라서:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f$$

$$m_1\vec{v}_{1i} + m_2\vec{v}_{2i} = m_1\vec{v}_{1f} + m_2\vec{v}_{2f}$$

> **외력이 없는 계에서, 총 운동량은 보존된다.**

이것이 **운동량 보존 법칙(conservation of linear momentum)** 이다.

운동량 보존의 적용 조건

운동량 보존이 성립하려면:

1. **계(system)를 잘 정의** 해야 한다 — 상호작용하는 물체를 모두 포함
2. **알짜 외력이 0** 이어야 한다
3. 특정 방향으로만 외력이 0이면, **그 방향의 운동량만 보존** 된다

예시: 마찰 없는 수평면에서의 충돌

- 수직 방향: 수직항력과 중력이 상쇄 → 외력 0
- 수평 방향: 외력 없음 → **수평 운동량 보존!**

9.6 운동량과 운동에너지

충돌의 종류

충돌은 운동에너지 보존 여부에 따라 분류한다:

종류	운동량	운동에너지
탄성 충돌	보존	보존
비탄성 충돌	보존	보존 안 됨
완전 비탄성 충돌	보존	최대 손실 (결합)

모든 충돌에서 **운동량은 보존** 된다 (외력 없을 때).

운동에너지는 **탄성 충돌** 에서만 보존된다.

9.7 1차원 탄성 충돌

두 보존법칙

1차원 탄성 충돌에서는 **두 가지** 보존법칙을 동시에 적용:

운동량 보존:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f}$$

운동에너지 보존:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

미지수 2개 (v_{1f}, v_{2f}), 방정식 2개 → 풀 수 있다!

풀이 결과

$v_{2i} = 0$ (표적이 정지)인 경우, 해는:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, v_{1i}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\, v_{1i}$$

특수한 경우들

1. 같은 질량 ($m_1 = m_2$):

$$v_{1f} = 0, \quad v_{2f} = v_{1i}$$

입사 입자가 완전히 정지하고, 표적이 같은 속도로 날아간다. **당구공** 의 정면 충돌!

2. 무거운 입자가 가벼운 표적에 충돌 ($m_1 \gg m_2$):

$$v_{1f} \approx v_{1i}, \quad v_{2f} \approx 2v_{1i}$$

입사 입자는 거의 그대로, 표적은 2배 속도로 튕겨나간다. **볼링공과 탁구공**

3. 가벼운 입자가 무거운 표적에 충돌 ($m_1 \ll m_2$):

$$v_{1f} \approx -v_{1i}, \quad v_{2f} \approx 0$$

입사 입자가 되튕긴다. **벽에 튀는 공**

시뮬레이션: 1차원 충돌 시뮬레이션

9.8 1차원 비탄성 충돌

완전 비탄성 충돌

운동량 보존 (완전 비탄성 충돌)

$m_1v_{1i} = (m_1 + m_2)v_f$

두 물체가 결합하여 함께 움직임 → 운동에너지 일부 손실

$\Delta K < 0$

두 물체가 충돌 후 **결합** 하여 함께 움직이는 경우:

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = (m_1 + m_2)v_f$$

$$v_f = \frac{m_1v_{1i} + m_2v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

운동에너지 손실

완전 비탄성 충돌에서 잃어버린 운동에너지:

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 - \frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2 - \frac{1}{2}m_2 v_{2i}^2$$

$v_{2i} = 0$인 경우:

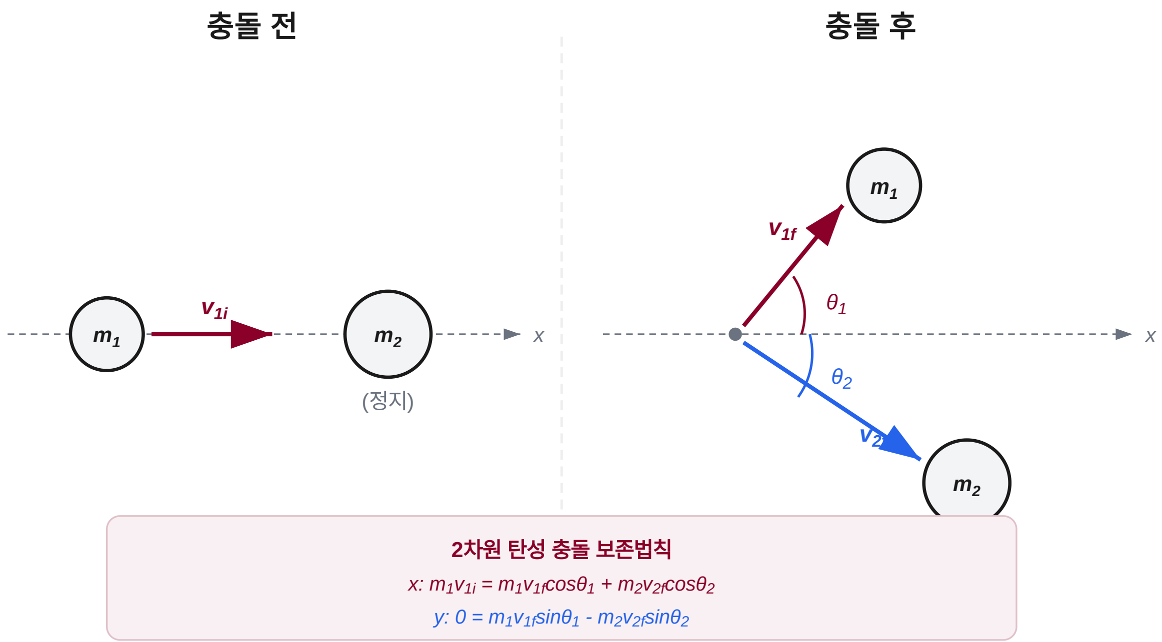
$$\Delta K = -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}v_{1i}^2$$

잃어버린 운동에너지는 **열, 소리, 변형** 등으로 변환된다.

> 자동차 충돌 사고에서 차가 크게 찌그러질수록 더 많은 에너지가 변형에 흡수되어 탑승자에게 전달되는 충격이 줄어든다. 이것이 **크럼플 존 (crumple zone)** 설계의 원리다.

9.9 2차원 충돌

2차원 탄성 충돌



2차원에서는 **운동량의 각 성분** 이 보존된다:

x성분: $m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2$

y성분: $0 = m_1 v_{1f} \sin\theta_1 - m_2 v_{2f} \sin\theta_2$

탄성 충돌이면 에너지도 보존:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

같은 질량의 2차원 탄성 충돌

$m_1 = m_2$이고 표적이 정지($v_{2i} = 0$)인 탄성 충돌에서:

$$\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$$

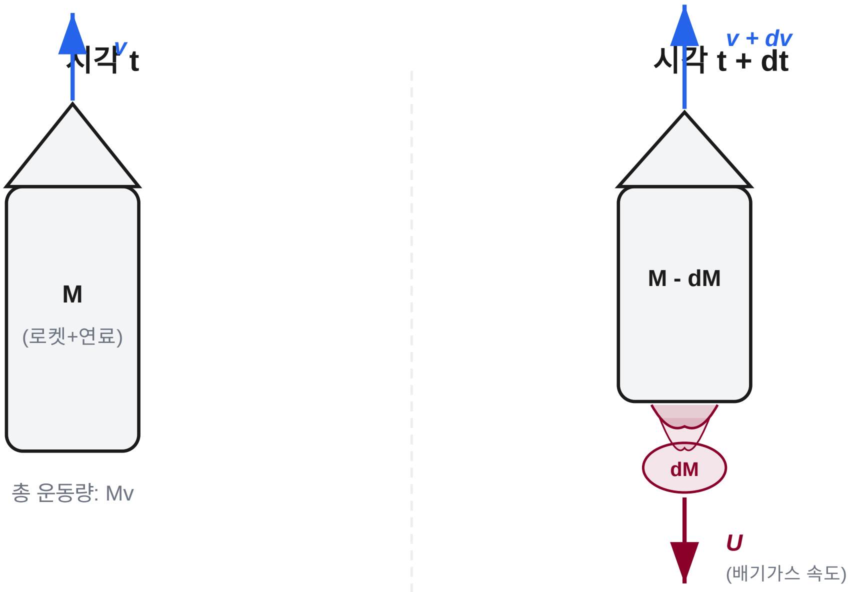
두 물체는 항상 **직각** 으로 산란된다!

이것은 **당구** 에서 자주 관찰할 수 있다. 한 공이 다른 정지 공에 비스듬히 맞으면, 두 공의 진행 방향이 항상 90도를 이룬다.

시뮬레이션: 2차원 충돌 시뮬레이션

9.10 가변 질량 계: 로켓

로켓의 원리



치올코프스키 로켓 방정식

$v_f - v_i = v_{rel}\, ln(M_i/M_f)$

로켓은 **질량이 변하는 계** 의 대표적 예이다.

연료를 분사하면 로켓의 질량이 줄어들면서 속도가 증가한다.

로켓 방정식 유도

시각 t: 질량 M인 로켓이 속도 v로 운동

시각 $t + dt$: 질량 dM의 배기가스를 상대속도 v_{rel}로 분사

운동량 보존 (외력 무시):

$$Mv = (M - dM)(v + dv) + dM(v - v_{\text{rel}})$$

정리하면:

$$M\,dv = v_{\text{rel}}\,dM$$

$$dv = v_{\text{rel}}\frac{dM}{M}$$

치올코프스키 로켓 방정식

적분하면 (M_i에서 M_f까지 질량이 변할 때):

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = v_{\text{rel}} \int_{M_i}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

$$v_f - v_i = v_{\text{rel}} \ln \frac{M_i}{M_f}$$

이것이 **치올코프스키 로켓 방정식(Tsiolkovsky rocket equation)** 이다.

- v_{rel}: 배기가스의 상대 속도 (로켓 기준)
- M_i / M_f: 질량비 (초기 질량 / 최종 질량)

로켓 방정식의 의미

$$\Delta v = v_{\text{rel}} \ln \frac{M_i}{M_f}$$

- 배기 속도 v_{rel}이 클수록 더 빨라진다
- 질량비 M_i/M_f가 클수록 더 빨라진다 (연료 비율이 높을수록)
- $\ln$ 함수이므로, 속도를 2배로 늘리려면 질량비가 **제곱** 이 되어야 한다

> **누리호(KSLV-II)** 는 3단 로켓이다. 단 분리를 하는 이유는, 빈 연료 탱크를 버려서 M_f를 줄이고 질량비를 키우기 위해서다. 1단 엔진 4기(75톤 추력 × 4), 배기 속도 약 3 km/s.

추력(Thrust)

로켓 엔진의 **추력(thrust)** T는:

$$T = v_{\mathrm{rel}} \frac{dM}{dt} = v_{\mathrm{rel}} R$$

여기서 $R = dM/dt$는 연료 소모율(질량 유량)이다.

외부 중력을 고려하면:

$$Ma = T - Mg = v_{\mathrm{rel}} R - Mg$$

추력이 중력보다 커야 이륙할 수 있다: $T > Mg$.

Review & Summary

핵심 개념

개념	공식
질량중심	$\vec{r}_{\text{com}} = \frac{1}{M}\sum m_i \vec{r}_i$
선운동량	$\vec{p} = m\vec{v}$
뉴턴 제2법칙	$\vec{F}_{\text{net}} = d\vec{p}/dt$
충격량	$\vec{J} = \int \vec{F}\,dt = \Delta\vec{p}$
운동량 보존	$\vec{P}_i = \vec{P}_f$ (외력 없을 때)

핵심 개념 (계속)

개념	공식
1D 탄성 충돌 ($v_{2i} = 0$)	$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}$
	$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i}$
완전 비탄성	$v_f = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$
로켓 방정식	$\Delta v = v_{\text{rel}} \ln(M_i / M_f)$

기억할 것:

- 운동량은 **벡터** 다 — 방향이 중요!
- **모든 충돌** 에서 운동량은 보존 (외력 없을 때)
- 운동에너지는 **탄성 충돌** 에서만 보존
- 로켓은 운동량 보존의 응용 — 연료를 뒤로 보내 앞으로 간다