7장: 운동에너지와 일

Kinetic Energy and Work

이번 장에서 배울 내용

- **운동에너지(kinetic energy)**: 운동 상태와 관련된 에너지
- **일(work)**: 힘을 통한 에너지 전달
- **일-운동에너지 정리**: 알짜 일 = 운동에너지 변화
- **중력** 이 하는 일과 **용수철 힘** 이 하는 일
- **변하는 힘** 이 하는 일 — 적분으로 계산
- **일률(power)**: 에너지 전달의 시간 비율

에너지란 무엇인가?

에너지(energy) 는 물체의 상태와 관련된 스칼라 양이다.

- 에너지는 한 형태에서 다른 형태로 **변환** 될 수 있다
- 한 물체에서 다른 물체로 **전달** 될 수 있다
- 그러나 전체 에너지의 총량은 항상 **보존** 된다

> 에너지를 은행 계좌의 돈에 비유할 수 있다. 계좌 간 이체(전달)는 가능하지만, 총액은 변하지 않는다.

이 장에서는 **운동에너지(kinetic energy)** 한 종류와, 에너지를 전달하는 방법인 **일(work)** 하나만 다룬다.

7.1 운동에너지

운동에너지(kinetic energy) K는 물체의 **운동 상태** 와 관련된 에너지다.

질량 m, 속력 v인 물체의 운동에너지:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

- K는 **스칼라** 이다 (방향 없음)
- 항상 $K \geq 0$ (음수가 될 수 없다)
- 물체가 정지하면 $K = 0$
- 속력이 빠를수록 운동에너지가 크다

운동에너지의 단위

$$1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$$

에너지의 SI 단위는 **줄(joule, J)** 이다.

예시: 질량 3.0 kg인 오리가 2.0 m/s로 날아간다면

$$K = \frac{1}{2}(3.0)(2.0)^2 = 6.0\ \mathrm{J}$$

7.2 일과 운동에너지

일(work)이란?

일(work) W는 힘을 통해 물체에 에너지를 전달(또는 물체에서 에너지를 빼앗)하는 것이다.

- 물체에 에너지가 전달되면 → **양의 일** ($W > 0$)
- 물체에서 에너지가 빠져나가면 → **음의 일** ($W < 0$)

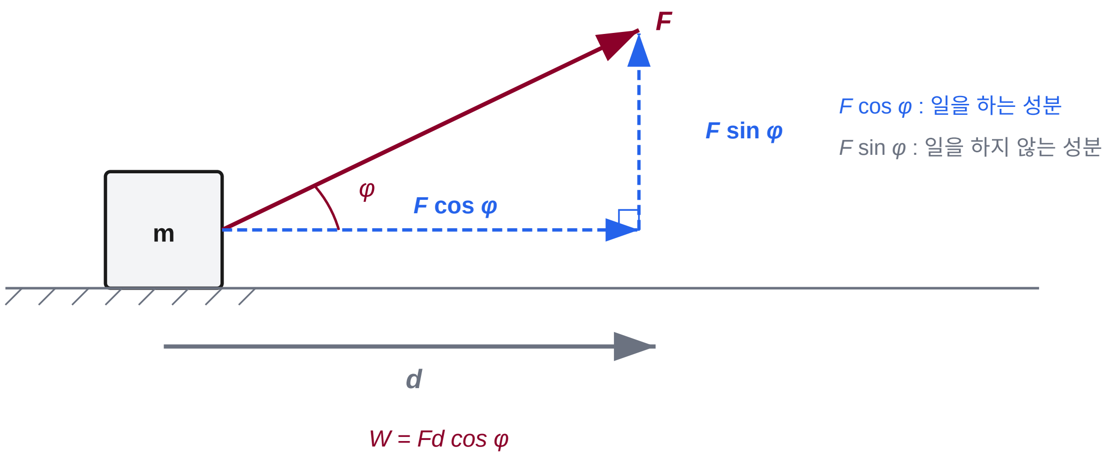
> 일상어에서 "일한다"는 것과 물리의 "일"은 다르다. 벽을 아무리 세게 밀어도, 벽이 움직이지 않으면 물리적으로 일은 0이다.

일정한 힘이 하는 일

일정한 힘 $\vec{F}$가 변위 $\vec{d}$만큼 물체를 이동시킬 때, 힘이 한 일:

$$W = Fd\cos\phi = \vec{F}\cdot\vec{d}$$

여기서 ϕ는 $\vec{F}$와 $\vec{d}$ 사이의 각도이다.



일의 부호

- $\phi < 90^\circ$: $\cos\phi > 0$ → **양의 일** (힘이 운동 방향과 같은 쪽)
- $\phi = 90^\circ$: $\cos\phi = 0$ → **일 = 0** (힘이 운동에 수직)
- $\phi > 90^\circ$: $\cos\phi < 0$ → **음의 일** (힘이 운동 반대쪽)

핵심: **변위 방향의 힘 성분** 만이 일을 한다.

수직 성분 $F\sin\phi$는 일을 하지 않는다!

알짜 일 (Net Work)

여러 힘이 작용할 때, **알짜 일** 은:

1. 각 힘이 한 일을 더한다: $W_{\mathrm{net}} = W_1 + W_2 + \cdots$
2. 또는 알짜힘 $\vec{F}_{\mathrm{net}}$으로 직접 계산: $W_{\mathrm{net}} = F_{\mathrm{net}} d \cos\phi$

일-운동에너지 정리

입자에 한 **알짜 일** 은 운동에너지의 **변화량** 과 같다:

$$\Delta K = K_f - K_i = W$$

즉,

$$K_f = K_i + W$$

- 알짜 일이 양수 → 운동에너지 증가 (가속)
- 알짜 일이 음수 → 운동에너지 감소 (감속)
- 알짜 일이 0 → 운동에너지 변화 없음

일-운동에너지 정리 유도

질량 m인 입자에 알짜힘 F_x가 작용, 변위 d:

$$F_x = ma_x$$

등가속도 운동: $v^2 = v_0^2 + 2a_x d$이므로

$$a_x = \frac{v^2 - v_0^2}{2d}$$

따라서

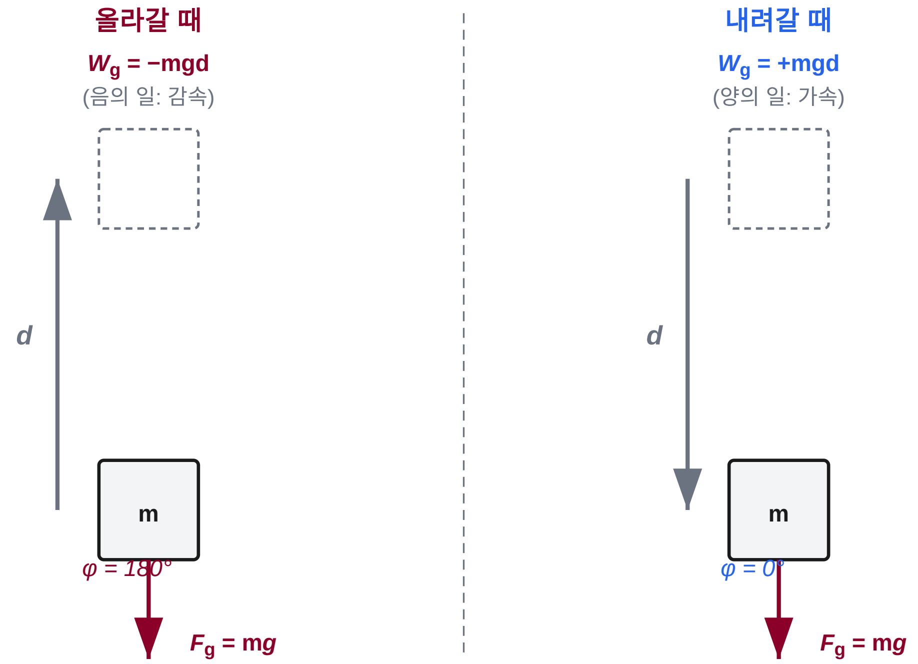
$$F_x d = m \cdot \frac{v^2 - v_0^2}{2d} \cdot d = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$W = K_f - K_i = \Delta K \quad \checkmark$$

시뮬레이션: 일-운동에너지 정리 시뮬레이션

7.3 중력이 하는 일

올라갈 때 vs. 내려올 때



중력 $\vec{F}_g = -mg\hat{j}$가 변위 $\vec{d}$동안 한 일:

$$W_g = mgd\cos\phi$$

중력이 하는 일: 정리

올라갈 때 ($\phi = 180^\circ$):

$$W_g = mgd\cos 180^\circ = -mgd$$

중력은 **음의 일** → 운동에너지를 빼앗는다 (감속)

내려올 때 ($\phi = 0^\circ$):

$$W_g = mgd\cos 0^\circ = +mgd$$

중력은 **양의 일** → 운동에너지를 전달한다 (가속)

물체를 들어올릴 때

외력 $\vec{F}_a$로 물체를 들어올리면, 일-운동에너지 정리에서:

$$\Delta K = K_f - K_i = W_a + W_g$$

물체가 처음과 나중에 모두 정지해 있다면 ($K_f = K_i$):

$$W_a + W_g = 0 \quad \Rightarrow \quad W_a = -W_g$$

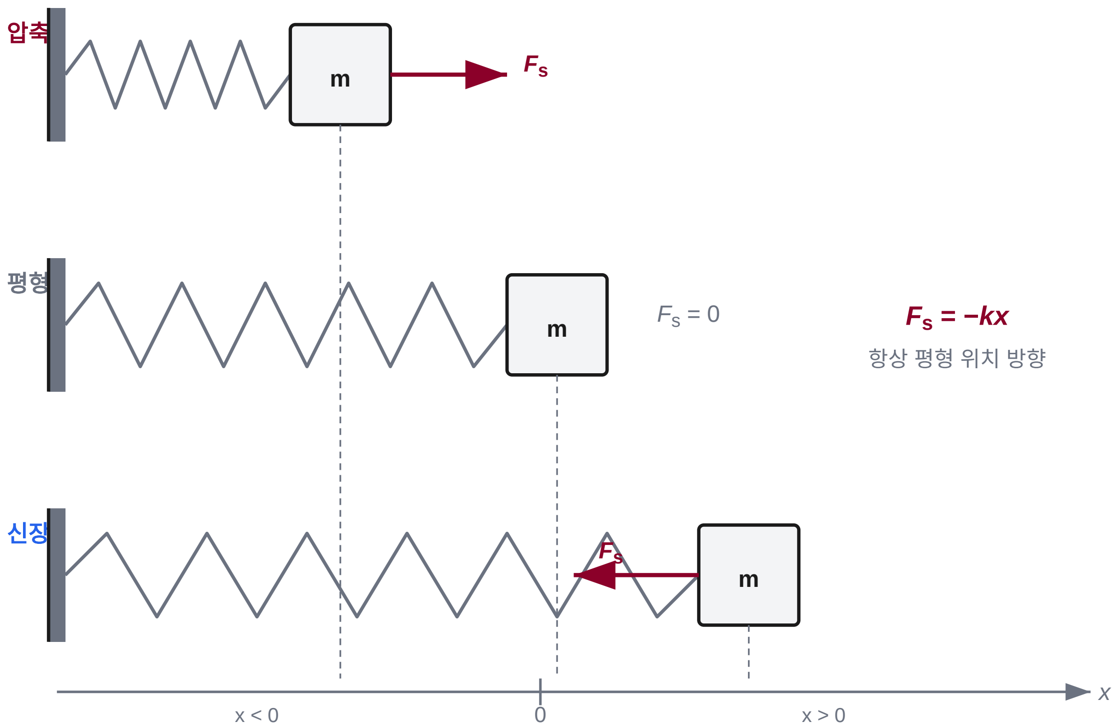
들어올리는 힘이 한 일 = 중력이 한 일의 음수

$$W_a = -mgd\cos\phi$$

위로 올릴 때: $W_a = mgd$, 아래로 내릴 때: $W_a = -mgd$

7.4 용수철 힘이 하는 일

용수철 힘: 훅 법칙 (Hooke's Law)



용수철
길이에
$\vec{d}$만큼
줄이면

$$\vec{F}_s =$$

x축을

$$F_x =$$

- k:
  수(
  co
  [N/
  수록
  용수
- 부호
  평형
  향한
  력)

용수철이 한 일

용수철 힘은 **변하는 힘** 이므로, $W = Fd\cos\phi$를 바로 쓸 수 없다.

적분으로 계산:

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\,dx = -\frac{1}{2}k\left[x^2\right]_{x_i}^{x_f}$$

$$W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$$

- $|x_f| < |x_i|$ (평형에 가까워짐) → $W_s > 0$ (양의 일)
- $|x_f| > |x_i|$ (평형에서 멀어짐) → $W_s < 0$ (음의 일)

외력이 용수철에 한 일

외력으로 블록을 용수철에 연결된 상태로 이동시킬 때:

$$\Delta K = W_a + W_s$$

처음과 나중에 블록이 정지해 있다면:

$$W_a = -W_s = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2$$

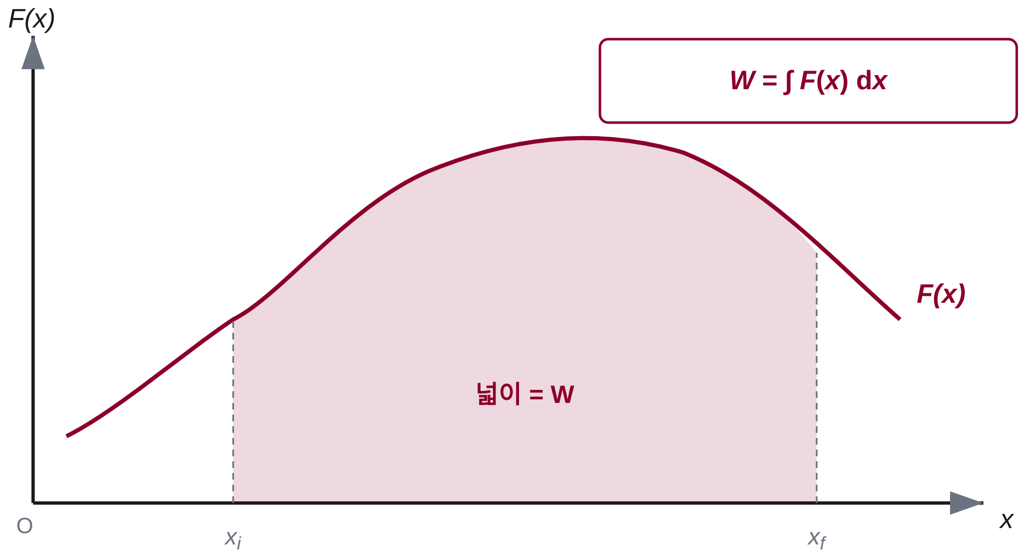
시뮬레이션: 용수철 힘이 하는 일 시뮬레이션

7.5 변하는 힘이 하는 일

1차원에서 변하는 힘

힘 $F(x)$가 위치에 따라 변할 때, 일은 **적분** 으로 구한다:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx$$



기하학적 의미: $F(x)$ 그래프와 x축 사이의 **넓이** 가 일이다.

3차원에서 변하는 힘

힘 $\vec{F} = F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}$가 작용할 때:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y\,dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z\,dz$$

(단, F_x는 x에만, F_y는 y에만, F_z는 z에만 의존한다고 가정)

변하는 힘에 대한 일-운동에너지 정리 유도

뉴턴 제2법칙: $F(x) = ma$

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx = \int_{x_i}^{x_f} ma\, dx$$

$a\, dx = \frac{dv}{dt} dx = v\, dv$를 이용하면:

$$W = m \int_{v_i}^{v_f} v\, dv = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 = \Delta K$$

변하는 힘에서도 **일-운동에너지 정리** 가 성립한다!

7.6 일률

일률(power)이란?

일률(power) P는 힘이 일을 하는 **시간당 비율** 이다.

평균 일률:

$$P_{\mathrm{avg}} = \frac{W}{\Delta t}$$

순간 일률:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

일률의 단위

$$1\ \mathrm{W}(\text{와트}) = 1\ \mathrm{J/s}$$

- James Watt의 이름을 딴 단위
- 1 마력(horsepower) = 746 W

에너지 단위로도 쓰인다:

$$1\ \mathrm{kW{\cdot}h} = (10^3\ \mathrm{W})(3600\ \mathrm{s}) = 3.6 \times 10^6\ \mathrm{J} = 3.6\ \mathrm{MJ}$$

전기 요금 고지서의 kWh가 바로 이 단위!

힘과 속도로 표현한 일률

힘 $\vec{F}$가 속도 $\vec{v}$인 물체에 작용할 때:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F\cos\phi \cdot dx}{dt} = Fv\cos\phi$$

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

예시: 자동차가 일정 속력 v로 달릴 때, 엔진이 발휘하는 힘:

$$F = \frac{P}{v}$$

일률이 같다면, 속력이 빠를수록 힘이 작아진다.

Review & Summary

핵심 개념

개념	공식
운동에너지	$K = \frac{1}{2}mv^2$
일 (일정한 힘)	$W = Fd\cos\phi = \vec{F}\cdot\vec{d}$
일-운동에너지 정리	$\Delta K = K_f - K_i = W$
중력이 한 일	$W_g = mgd\cos\phi$
용수철이 한 일	$W_s = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$
변하는 힘이 한 일	$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx$

핵심 개념 (계속)

개념	공식
평균 일률	$P_{\text{avg}} = W/\Delta t$
순간 일률	$P = dW/dt = \vec{F} \cdot \vec{v}$
훅 법칙	$F_s = -kx$

기억할 것:

- 일은 **스칼라** 다 (벡터 아님)
- 변위에 **수직인 힘** 은 일을 하지 않는다
- 일-운동에너지 정리는 일정한 힘이든 변하는 힘이든 성립
- 일률은 에너지 전달의 **속도**