3장: 벡터

Vectors

이번 장에서 배울 내용

- **스칼라(scalar)** 와 **벡터(vector)** 의 차이
- 벡터의 **덧셈** 과 **뺄셈** — 기하학적 방법
- 벡터의 **성분 분해** — 직교 좌표계
- **단위벡터(unit vector)** 와 성분별 벡터 연산
- **스칼라곱(내적, dot product)** — 일(work) 계산의 핵심
- **벡터곱(외적, cross product)** — 토크, 각운동량의 핵심

왜 벡터가 필요한가?

자동차 내비게이션이 "서울역에서 37 km 이동하세요"라고만 안내한다면?

방향 없이 거리만으로는 목적지에 도달할 수 없다.

물리에서도 마찬가지다:

- **변위(displacement)**: 어디로 얼마나 이동했는가
- **속도(velocity)**: 어느 방향으로 얼마나 빠른가
- **힘(force)**: 어느 방향으로 얼마나 세게 미는가

이 양들은 모두 **크기** 와 **방향** 을 동시에 가진다 → **벡터**

3.1 벡터와 그 성분

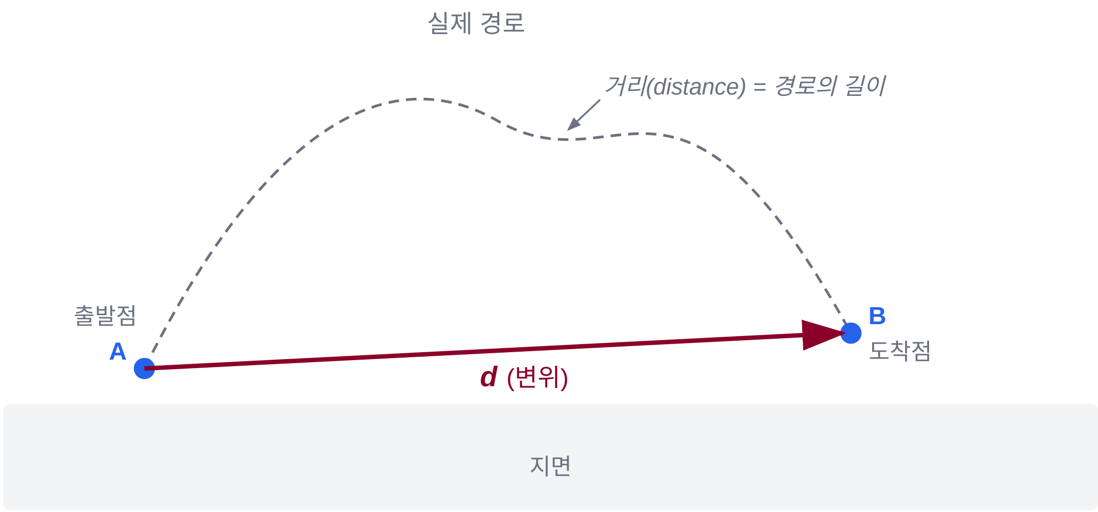
스칼라 vs 벡터

	스칼라 (scalar)	벡터 (vector)
정의	크기만 있는 양	크기 + 방향
예시	온도, 질량, 시간, 에너지	변위, 속도, 가속도, 힘
표기	m, T, t	$\vec{a}$, $\vec{F}$, $\vec{v}$
연산	보통의 대수	벡터 대수 (이 장에서 배움)

벡터의 크기(magnitude)는 항상 ≥ 0이며, $|\vec{a}|$ 또는 a로 쓴다.

변위 벡터

변위(displacement) 는 가장 직관적인 벡터다.

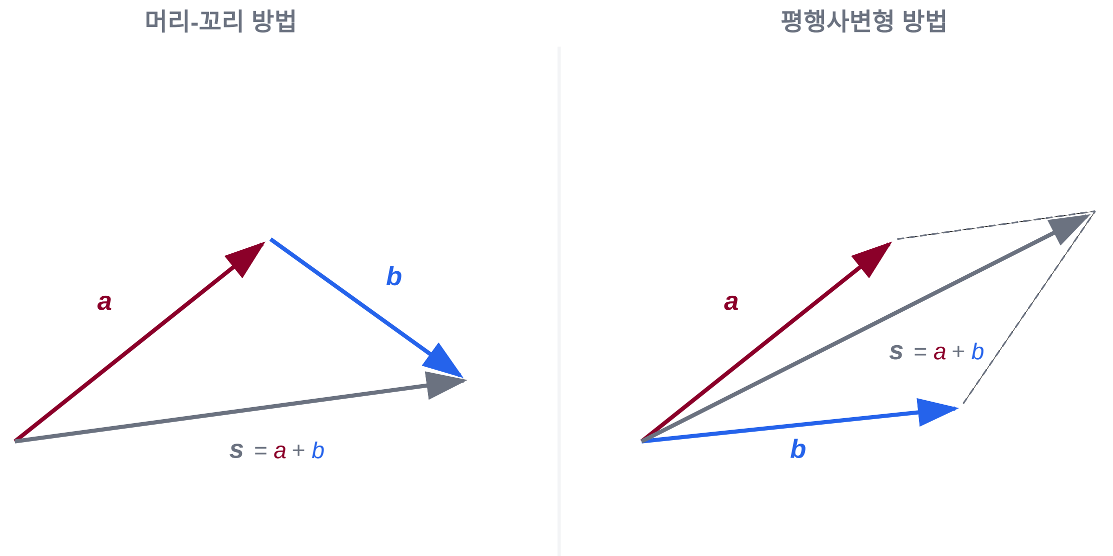


- **거리(distance)**: 실제로 이동한 경로의 총 길이 (스칼라)
- **변위(displacement)**: 출발점에서 도착점으로의 직선 화살표 (벡터)

같은 경로를 걸어도, 변위는 시작점과 끝점만으로 결정된다.

벡터 덧셈: 머리-꼬리 방법

두 변위 $\vec{a}$와 $\vec{b}$를 연속으로 수행하면?



머리-꼬리(head-to-tail) 방법:

1. $\vec{a}$를 그린다
2. $\vec{a}$의 머리(끝점)에 $\vec{b}$의 꼬리(시작점)를 붙인다
3. $\vec{a}$의 꼬리에서 $\vec{b}$의 머리까지 → 합 벡터 $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$

벡터 덧셈의 법칙

교환법칙 (commutative law):

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

순서를 바꿔도 결과는 같다. 평행사변형 방법으로 확인할 수 있다.

결합법칙 (associative law):

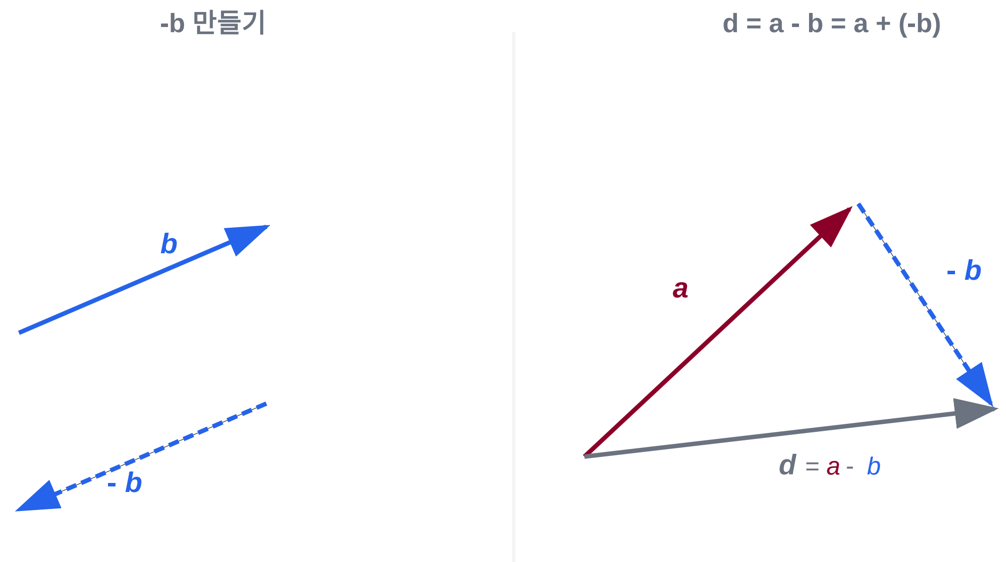
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

세 벡터를 더할 때, 어떤 두 개를 먼저 더해도 결과가 같다.

벡터 뺄셈

벡터 뺄셈 $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$는 **음의 벡터** 를 더하는 것이다:

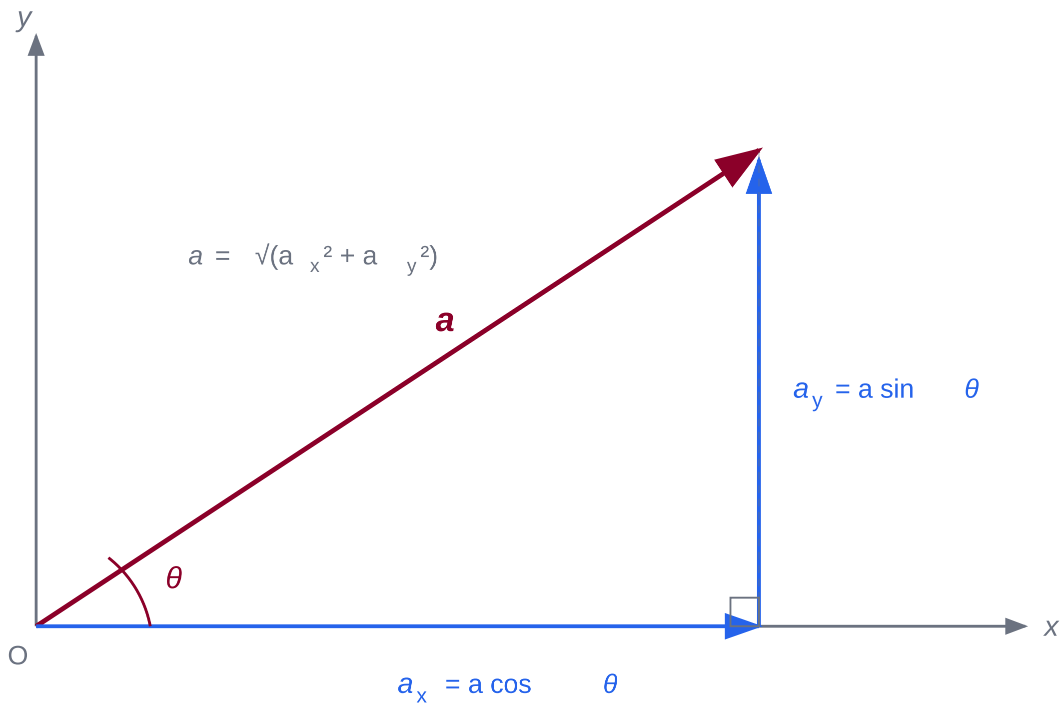
$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



$-\vec{b}$는 $\vec{b}$와 크기가 같고 **방향이 반대** 인 벡터다.

벡터의 성분 분해

벡터를 직교 좌표축을 따라 분해하면 계산이 편리하다.



벡터 $\vec{a}$가 x축과 각도 θ를 이루면:

$$a_x = a\cos\theta, \quad a_y = a\sin\theta$$

성분에서 벡터로 (역변환)

성분 a_x, a_y를 알면 크기와 방향을 구할 수 있다:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{a_y}{a_x}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{a_y}{a_x}$$

주의: $\tan^{-1}$은 두 개의 해를 줄 수 있다. 벡터가 어느 사분면에 있는지 반드시 확인해야 한다.

각도 단위: 도와 라디안

물리에서는 **라디안(radian)** 을 기본 단위로 사용한다.

$$\pi \text{ rad} = 180^\circ$$

변환: $\theta_{\text{rad}} = \theta_{\text{deg}} \times \frac{\pi}{180}$

도(degree)	라디안(radian)
0°	0
30°	$\pi/6$
45°	$\pi/4$
90°	$\pi/2$
180°	π
360°	2π

예제: 서울에서 수원까지의 변위

서울역에서 수원역까지 직선거리 약 34 km. 방향은 남쪽에서 서쪽으로 15° (남남서).

좌표계: x = 동쪽, y = 북쪽으로 설정하면:

$$\theta = 180^\circ + 75^\circ = 255^\circ \quad \text{(남남서 방향)}$$

$$d_x = 34\cos 255^\circ = 34 \times (-0.259) \approx -8.8\ \mathrm{km}$$

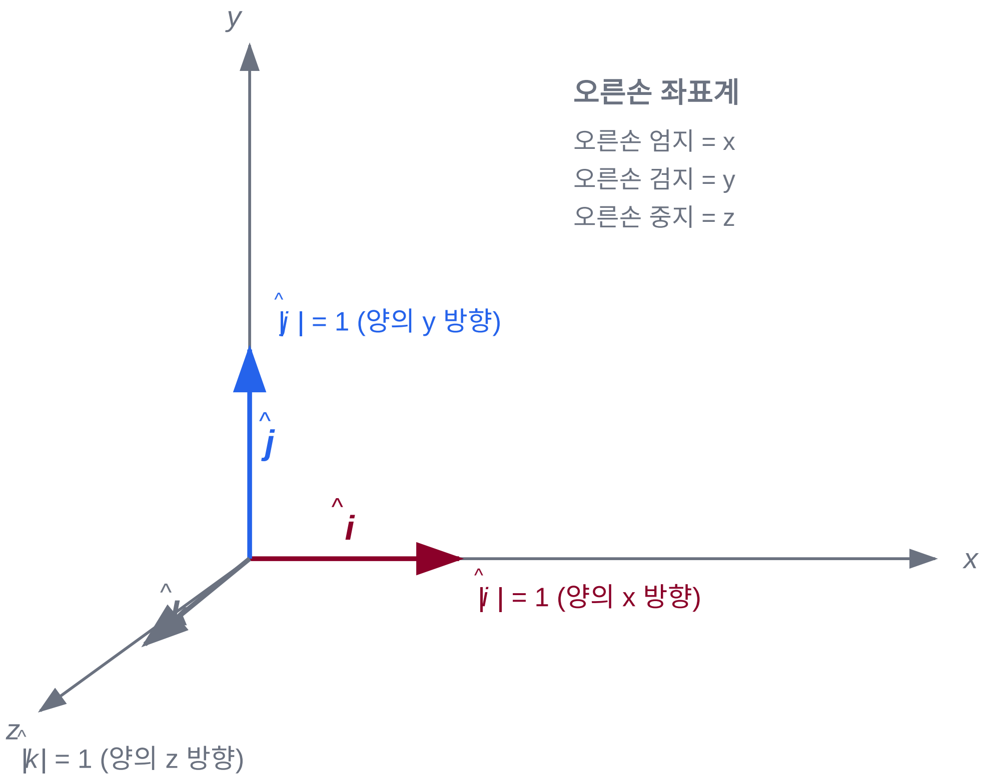
$$d_y = 34\sin 255^\circ = 34 \times (-0.966) \approx -32.8\ \mathrm{km}$$

음의 x 성분(서쪽)과 음의 y 성분(남쪽)이므로 남남서가 맞다.

3.2 단위벡터

단위벡터란?

단위벡터(unit vector) 는 크기가 1이고 특정 방향을 가리키는 벡터다.



직교 좌표계의 단위벡터:

- $\hat{i}$: 양의 x 방향, $|\hat{i}| = 1$
- $\hat{j}$: 양의 y 방향, $|\hat{j}| = 1$
- $\hat{k}$: 양의 z 방향, $|\hat{k}| = 1$

단위벡터를 이용한 벡터 표현

임의의 벡터 $\vec{a}$를 단위벡터로 표현:

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

예: $\vec{a} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + 5\hat{k}$이면

- $a_x = 3$, $a_y = -2$, $a_z = 5$
- $a = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{38} \approx 6.16$

성분별 벡터 덧셈

$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$, $\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$일 때:

$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} + (a_z + b_z)\hat{k}$$

각 성분끼리 더하면 된다! 기하학적 방법보다 훨씬 간단하다.

뺄셈도 마찬가지:

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\hat{i} + (a_y - b_y)\hat{j} + (a_z - b_z)\hat{k}$$

예제: 세 벡터의 성분별 덧셈

$\vec{a} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$, $\vec{b} = -2\hat{i} + 5\hat{j}$, $\vec{c} = \hat{i} + 2\hat{j}$일 때 $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$를 구하라.

x 성분: $r_x = 4 + (-2) + 1 = 3$

y 성분: $r_y = (-3) + 5 + 2 = 4$

$$\vec{r} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$$

크기: $r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

방향: $\theta = \tan^{-1}(4/3) = 53.1^\circ$

좌표계 선택의 자유

좌표축의 방향은 자유롭게 선택할 수 있다.

- 물리 법칙은 좌표계 선택에 의존하지 않는다
- 문제에 맞게 **편리한 방향** 을 선택하면 계산이 간단해진다

예: 빗면 문제 → 빗면을 따라 x축, 빗면에 수직으로 y축

중요한 것은 한 번 선택한 좌표계를 문제 풀이 내내 **일관되게** 사용하는 것이다.

시뮬레이션: 벡터 덧셈 시뮬레이션

3.3 벡터의 곱셈

물리에서 벡터의 곱셈은 **두 가지** 가 있다:

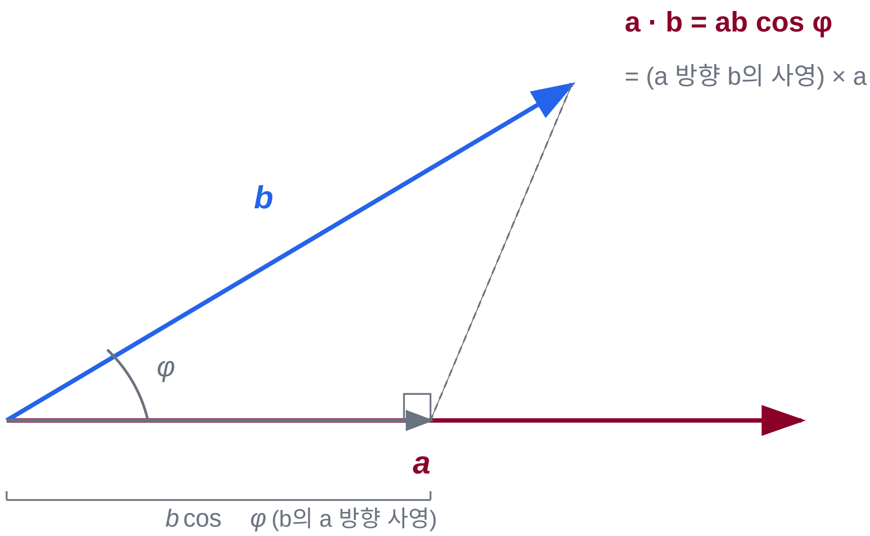
	스칼라곱 (내적)	벡터곱 (외적)
기호	$\vec{a} \cdot \vec{b}$	$\vec{a} \times \vec{b}$
결과	**스칼라**	**벡터**
물리 응용	일(work)	토크(torque)

각각의 정의와 계산법을 배워보자.

스칼라곱 (내적, dot product)

두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$ 사이의 각도가 ϕ일 때:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\phi$$



기하학적 의미: $\vec{b}$를 $\vec{a}$ 방향으로 **사영(projection)** 한 것에 a를 곱한 값

내적의 부호

ϕ의 범위에 따라 내적의 부호가 결정된다:

- $0 \leq \phi < 90^\circ$: $\cos\phi > 0$ → $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$
- $\phi = 90^\circ$: $\cos\phi = 0$ → $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ (수직)
- $90^\circ < \phi \leq 180^\circ$: $\cos\phi < 0$ → $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

두 벡터가 수직이면 내적이 0이다 — 매우 중요한 성질!

교환법칙 성립: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$

내적의 성분 형태

$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$, $\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$일 때:

단위벡터의 내적: $\hat{i} \cdot \hat{i} = \hat{j} \cdot \hat{j} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$, $\hat{i} \cdot \hat{j} = \hat{j} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{i} = 0$

따라서:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

각 성분끼리 곱해서 더하면 된다!

내적 예제

$\vec{a} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$일 때:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (3)(2) + (-4)(3) + (2)(-1) = 6 - 12 - 2 = -8$$

두 벡터 사이의 각도:

$$a = \sqrt{9 + 16 + 4} = \sqrt{29}, \quad b = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$$

$$\cos\phi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \frac{-8}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{14}} = \frac{-8}{\sqrt{406}} \approx -0.397$$

$$\phi = \cos^{-1}(-0.397) \approx 113.4^\circ$$

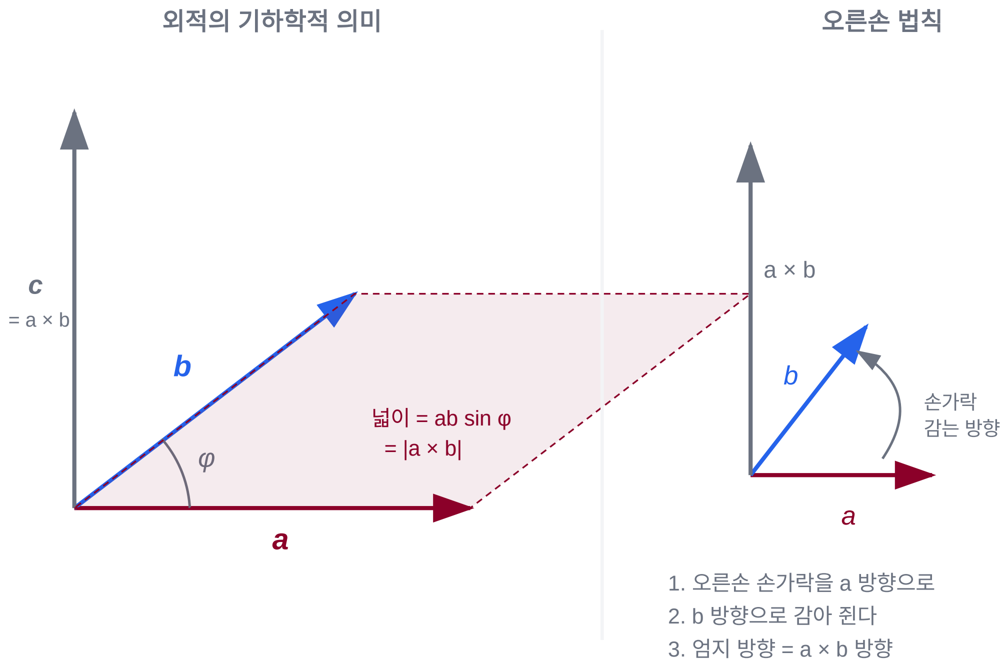
벡터곱 (외적, cross product)

두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$의 외적 $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$:

크기:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \phi$$

방향: 오른손 법칙으로 결정 — $\vec{a}$와 $\vec{b}$가 이루는 평면에 **수직**



외적의 성질

반교환: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$ (순서를 바꾸면 방향이 반대!)

평행하면 외적이 0: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ ($\phi = 0^\circ$ 또는 180°이면 $\sin\phi = 0$)

수직이면 외적이 최대: $|\vec{a} \times \vec{b}| = ab$ ($\phi = 90^\circ$이면 $\sin\phi = 1$)

단위벡터의 외적:

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}, \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}, \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}, \quad \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}, \quad \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$$

외적의 성분 형태

$\vec{a} \times \vec{b}$를 성분으로 전개하면:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$$

행렬식으로 쓰면 기억하기 쉽다:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

외적 예제

$\vec{a} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$, $\vec{b} = -\hat{i} + 4\hat{j}$일 때 $\vec{a} \times \vec{b}$를 구하라.

$a_z = 0$, $b_z = 0$이므로:

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (3 \cdot 0 - 0 \cdot 4)\hat{i} + (0 \cdot (-1) - 2 \cdot 0)\hat{j} + (2 \cdot 4 - 3 \cdot (-1))\hat{k} \\ &= 0\hat{i} + 0\hat{j} + (8 + 3)\hat{k} = 11\hat{k}\end{aligned}$$

결과가 $\hat{k}$ 방향 — 두 벡터가 xy 평면에 있으므로, 외적은 z 방향이다.

크기: $|\vec{a} \times \vec{b}| = 11$

시뮬레이션: 내적과 외적 시뮬레이션

Review & Summary

핵심 개념

개념	공식
벡터의 성분	$a_x = a\cos\theta,\ a_y = a\sin\theta$
벡터의 크기	$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$
벡터의 방향	$\theta = \tan^{-1}(a_y/a_x)$
단위벡터 표현	$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$
성분별 덧셈	$r_x = a_x + b_x,\ r_y = a_y + b_y,\ r_z = a_z + b_z$

핵심 개념 (계속)

개념	공식
스칼라곱 (내적)	$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\phi = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$
벡터곱 (외적) 크기	$\lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert = ab\sin\phi$
벡터곱 (외적) 성분	$(a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k}$

기억할 것:

- 벡터의 덧셈은 **성분별로** 계산하는 것이 가장 편리하다
- 내적의 결과는 **스칼라**, 외적의 결과는 **벡터** 이다
- 두 벡터가 **수직** 이면 내적 = 0, **평행** 이면 외적 = 0
- 외적은 **순서가 중요** 하다 ($\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$)