2장: 직선 운동

Motion Along a Straight Line

이번 장에서 배울 내용

- **위치(position)** 와 **변위(displacement)**: 물체가 어디에 있고, 얼마나 이동했는가
- **평균 속도(average velocity)** 와 **순간 속도 (instantaneous velocity)**
- **가속도(acceleration)**: 속도가 변하는 비율
- **등가속도 운동** 의 5가지 공식 — 완전 유도
- **자유 낙하(free fall)**: $a = -g$인 특수한 등가속도 운동
- 그래프로 이해하는 운동: x-t, v-t, a-t 그래프

운동학이란?

운동학(kinematics) 은 물체의 운동을 기술하는 학문이다.

이 장에서는 가장 단순한 경우부터 시작한다:

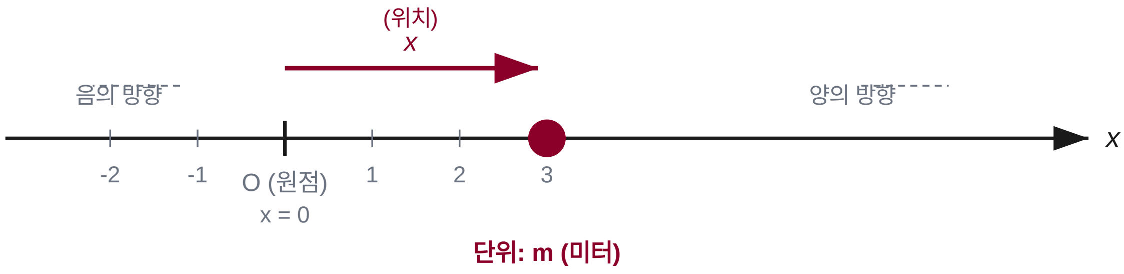
- 물체를 **입자(particle)** 로 취급 (크기 무시)
- **직선 위** 에서만 운동 (1차원)
- "왜 움직이는가?"는 묻지 않는다 → 그건 힘과 뉴턴 법칙(4장)의 영역

예: KTX가 서울에서 부산까지 달리는 상황에서, KTX의 길이(약 388 m)는 서울-부산 거리(약 400 km)에 비해 무시할 수 있으므로 입자로 취급한다.

2.1 위치와 변위

위치(Position)

1차원 운동을 기술하려면 먼저 **좌표축** 을 정해야 한다.



- **원점(origin)** O를 정하고
- **양의 방향** 을 정한다 (보통 오른쪽)
- 물체의 **위치** x는 원점에서 물체까지의 거리(부호 포함)

변위(Displacement)

물체가 위치 x_1에서 x_2로 이동했을 때, **변위** :

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

- $\Delta x > 0$: 양의 방향으로 이동
- $\Delta x < 0$: 음의 방향으로 이동
- 변위는 **벡터** 적 개념 — 크기와 방향이 있다

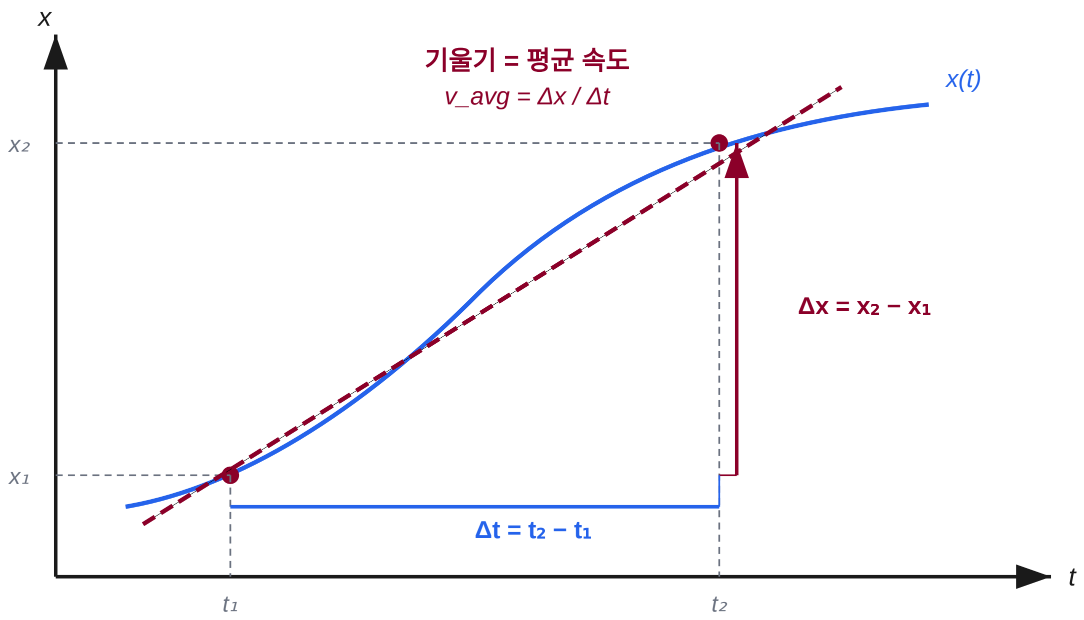
> **변위 ≠ 이동 거리(distance)**
>
> 서울 지하철 2호선을 한 바퀴 타면 이동 거리는 약 48 km이지만, 변위는 0이다!

2.2 평균 속도와 평균 속력

평균 속도(Average Velocity)

시간 $\Delta t = t_2 - t_1$ 동안 변위 Δx를 이동했을 때:

$$v_{\text{avg}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$



x-t 그래프에서 평균 속도는 두 점을 잇는 **할선(secant line)** 의 기울기다.

평균 속력(Average Speed)

$$s_{\text{avg}} = \frac{\text{총 이동 거리}}{\Delta t}$$

- 평균 속력은 **스칼라** 이다 (항상 ≥ 0)
- 평균 속도와 일반적으로 다르다!

예시: KTX가 서울 → 부산(400 km)을 2시간 20분에 주파하면

$$s_{\text{avg}} = \frac{400\ \text{km}}{2.33\ \text{h}} \approx 172\ \text{km/h}$$

만약 되돌아왔다면 평균 속도는 0이지만, 평균 속력은 172 km/h 이다.

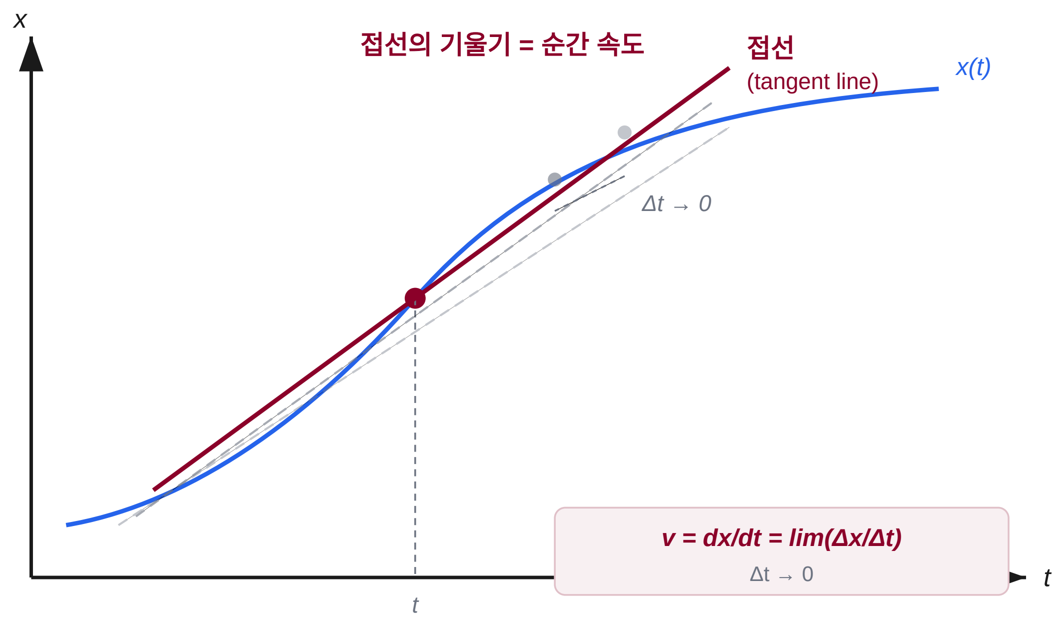
2.3 순간 속도

순간 속도(Instantaneous Velocity)

Δt를 점점 줄여 0에 가깝게 하면:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

순간 속도는 위치의 **시간 미분** 이다.



x-t 그래프에서 순간 속도는 해당 점에서의 **접선(tangent line)** 의 기울기다.

순간 속력(Instantaneous Speed)

순간 속력(speed) 은 순간 속도의 크기:

$$\text{speed} = |v|$$

속도가 양이면 양의 방향, 음이면 음의 방향으로 운동 중이다.

2.4 가속도

평균 가속도(Average Acceleration)

속도가 변하면 물체는 **가속** 한다.

시간 Δt 동안 속도가 v_1에서 v_2로 변할 때:

$$a_{\text{avg}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

순간 가속도(Instantaneous Acceleration)

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

가속도는 속도의 **시간 미분** 이고, 위치의 **이계 미분** 이다.

v-t 그래프에서 가속도는 **접선의 기울기** 다.

- $a > 0$: 속도가 양의 방향으로 증가
- $a < 0$: 속도가 음의 방향으로 증가 (양의 방향으로 감소)

> 주의: "감속"이라고 해서 $a < 0$인 것은 아니다. 감속은 $|v|$가 줄어드는 것이므로, v와 a의 부호가 반대일 때 감속이다.

2.5 등가속도 운동

가속도가 **일정한** 경우: $a = \mathrm{const}$

이 특수한 경우에 5개의 기본 공식이 존재한다. 하나씩 유도해 보자.

공식 1: 속도-시간 관계

가속도의 정의에서 출발:

$$a = \frac{dv}{dt} = \text{const}$$

$t = 0$일 때 $v = v_0$으로 적분하면:

$$\int_{v_0}^{v} dv' = \int_0^t a\, dt'$$

$$v - v_0 = at$$

$$\boxed{v = v_0 + at} \qquad \cdots (1)$$

속도는 시간에 대해 **선형** 으로 변한다.

공식 2: 위치-시간 관계

속도의 정의에서:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

공식 (1)을 대입하고, $t = 0$일 때 $x = x_0$으로 적분:

$$\int_{x_0}^{x} dx' = \int_0^t (v_0 + at')\, dt'$$

$$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$\boxed{x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2} \quad \cdots (2)$$

위치는 시간에 대한 **이차함수(포물선)** 이다.

공식 3: 속도-위치 관계 (시간 소거)

공식 (1)에서 $t = \frac{v-v_0}{a}$를 공식 (2)에 대입:

$$x - x_0 = v_0 \cdot \frac{v - v_0}{a} + \frac{1}{2}a\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2$$

$$x - x_0 = \frac{v_0 v - v_0^2}{a} + \frac{(v - v_0)^2}{2a}$$

$$2a(x - x_0) = 2v_0 v - 2v_0^2 + v^2 - 2v_0 v + v_0^2$$

$$2a(x - x_0) = v^2 - v_0^2$$

$$\boxed{v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)} \quad \cdots (3)$$

시간 t가 등장하지 않으므로, t를 모를 때 유용하다.

공식 4, 5: 평균 속도 활용

등가속도 운동에서 **평균 속도** :

$$\boxed{v_{\text{avg}} = \frac{v_0 + v}{2}} \quad \cdots (4)$$

변위를 평균 속도로 표현:

$$\boxed{x - x_0 = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t} \quad \cdots (5)$$

등가속도 운동 5대 공식 정리

번호	공식	포함하지 않는 변수
(1)	$v = v_0 + at$	x
(2)	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	v
(3)	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	t
(4)	$v_{\text{avg}} = \frac{v_0 + v}{2}$	x, t
(5)	$x - x_0 = \frac{v_0 + v}{2} \cdot t$	a

5개의 변수 (x, v, a, t, v_0) 중 **3개** 를 알면 나머지 2개를 구할 수 있다.

시뮬레이션: 등가속도 직선 운동 시뮬레이션

2.6 자유 낙하

자유 낙하(Free Fall)란?

자유 낙하 란 **중력만** 작용하는 운동이다.

- 공기 저항을 무시하면, 모든 물체는 질량에 관계없이 **같은 가속도** 로 낙하한다
- 이 가속도를 **중력가속도** 라 부르고 g로 표기한다

$$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2} \approx 10\ \mathrm{m/s^2}$$

자유 낙하에서의 좌표계

y축을 **위쪽을 양의 방향** 으로 잡으면:

$$a = -g = -9.8\ \mathrm{m/s}^2$$

등가속도 공식에서 $x \to y$, $a \to -g$로 바꾸면:

$$v = v_0 - gt$$

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0)$$

위로 던진 물체

초기 속도 $v_0 > 0$ (위쪽)으로 공을 던지면:

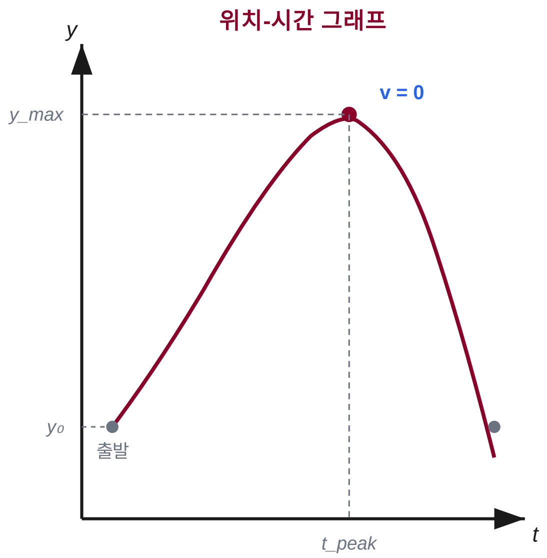
1. **상승 구간**: 속도 감소, $v > 0$
2. **최고점**: $v = 0$ → $t_{\text{peak}} = \frac{v_0}{g}$
3. **하강 구간**: 속도 증가 (아래로), $v < 0$

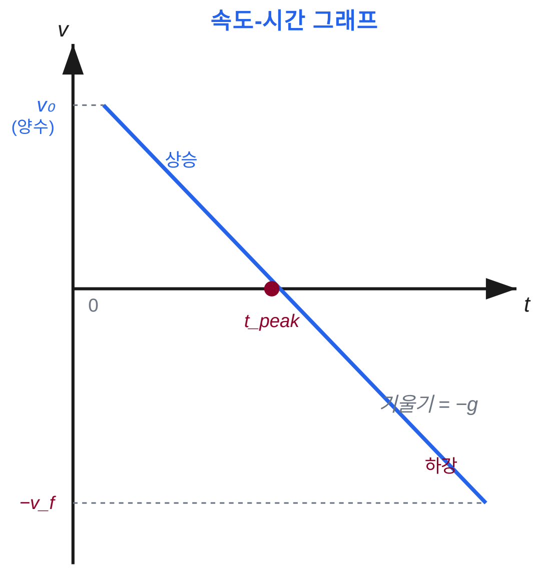
최고점 높이:

$$y_{\max} = y_0 + \frac{v_0^2}{2g}$$

> 63빌딩 옥상(높이 약 250 m)에서 공을 가만히 놓으면 지면에 닿을 때 속력은?
>
> $v^2 = 0 + 2(9.8)(250) = 4900$
>
> $v = 70$ m/s ≈ 252 km/h

위로 던진 물체의 그래프





- y-t: 아래로 볼록한 포물선 (최고점에서 $v = 0$)
- v-t: 기울기 $-g$인 직선 (음의 기울기)
- 상승/하강 시 **가속도는 항상 $-g$** (변하지 않는다!)

시뮬레이션: 자유 낙하 시뮬레이션

2.7 그래프로 이해하는 적분

v-t 그래프의 넓이 = 변위

속도의 정의 $v = dx/dt$에서:

$$dx = v\,dt$$

양변을 t_1에서 t_2까지 적분:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$$

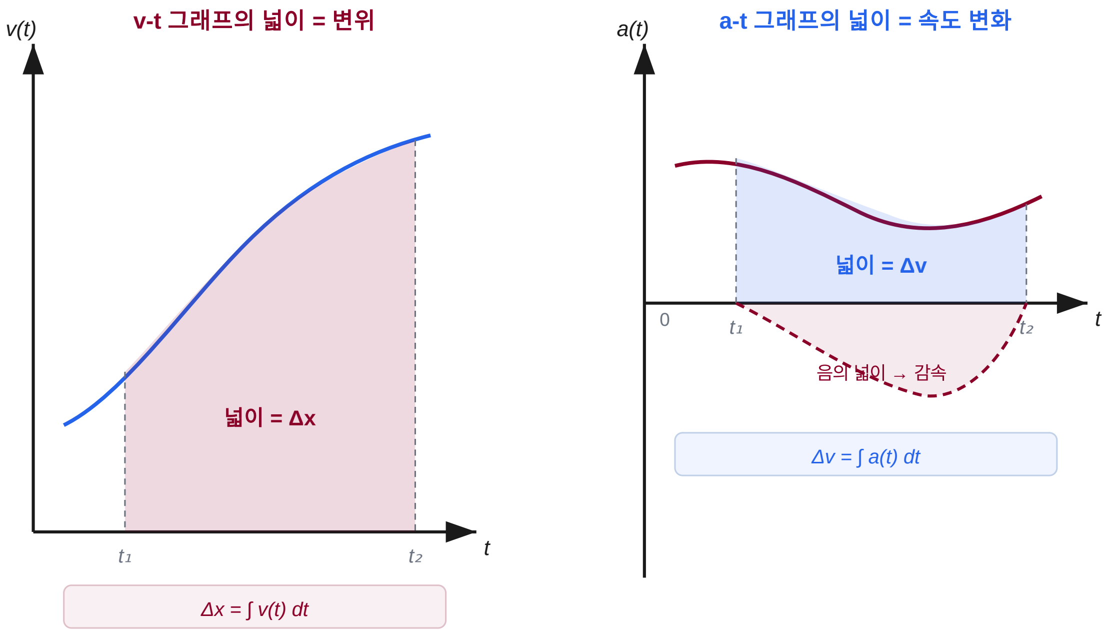
v-t 그래프에서 곡선과 시간축 사이의 **넓이** 가 변위다.

a-t 그래프의 넓이 = 속도 변화

마찬가지로 $a = dv/dt$에서:

$$\Delta v = v_2 - v_1 = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\, dt$$

a-t 그래프에서 곡선과 시간축 사이의 **넓이** 가 속도의 변화량이다.



그래프 해석 정리

그래프	기울기의 의미	넓이의 의미
x-t	순간 속도 v	—
v-t	순간 가속도 a	변위 Δx
a-t	—	속도 변화 Δv

이 관계를 잘 기억하면 그래프만 보고도 운동을 분석할 수 있다!

Review & Summary

핵심 개념

개념	공식
변위	$\Delta x = x_2 - x_1$
평균 속도	$v_{\text{avg}} = \Delta x / \Delta t$
순간 속도	$v = dx/dt$
평균 가속도	$a_{\text{avg}} = \Delta v / \Delta t$
순간 가속도	$a = dv/dt = d^2x/dt^2$

등가속도 운동 공식

공식
$v = v_0 + at$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$
$x - x_0 = \frac{v_0+v}{2} \cdot t$

자유 낙하: $a = -g = -9.8$ m/s² (위를 양의 방향으로 잡을 때)

기억할 것:

- 변위와 이동 거리는 다르다
- 속도는 벡터, 속력은 스칼라
- x-t 기울기 = v, v-t 기울기 = a
- v-t 넓이 = Δx, a-t 넓이 = Δv