Chapter 17: Waves II — 풀이

문제 1 풀이

$\rho = 1.21$ kg/m^3, $v = 343$ m/s, $f = 1000$ Hz, $\Delta p_m = 28$ Pa
(a) 압력 진폭과 변위 진폭의 관계:

$$\Delta p_m = v\rho\omega s_m = v\rho(2\pi f)s_m$$

$$s_m = \frac{\Delta p_m}{v\rho(2\pi f)} = \frac{28}{343 \times 1.21 \times 2\pi \times 1000}$$

$$s_m = \frac{28}{2\,609\,000} = \boxed{1.07 \times 10^{-5}\text{ m} \approx 11\ \mu\text{m}}$$

(b) 세기:

$$I = \frac{(\Delta p_m)^2}{2\rho v}$$

이 공식은 $\Delta p_m = v\rho\omega s_m$을 $I = \frac{1}{2}\rho v\omega^2 s_m^2$에 대입하면 얻는다:

$$I = \frac{28^2}{2 \times 1.21 \times 343} = \frac{784}{830.1} = \boxed{0.944\text{ W/m}^2}$$

(c) 음압 수준:

$$\beta = 10\log\frac{I}{I_0} = 10\log\frac{0.944}{10^{-12}} = 10\log(9.44 \times 10^{11})$$

$$= 10 \times (11 + \log 9.44) = 10 \times (11 + 0.975) = \boxed{119.8\text{ dB} \approx 120\text{ dB}}$$

이것은 통증 역치에 해당한다.

문제 2 풀이

$P_s = 100$ W, $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2
(a) 거리 $r_1 = 5.0$ m에서:

$$I_1 = \frac{P_s}{4\pi r_1^2} = \frac{100}{4\pi(5.0)^2} = \frac{100}{314.2} = \boxed{0.318\text{ W/m}^2}$$

$$\beta_1 = 10\log\frac{I_1}{I_0} = 10\log\frac{0.318}{10^{-12}} = 10\log(3.18 \times 10^{11})$$

$$= 10(11 + \log 3.18) = 10(11 + 0.502) = \boxed{115.0\text{ dB}}$$

(b) $\beta_2 = 60$ dB이면:

$$60 = 10 \log \frac{I_2}{10^{-12}} \implies \log \frac{I_2}{10^{-12}} = 6 \implies I_2 = 10^{-6} \text{ W/m}^2$$

$$I_2 = \frac{P_s}{4\pi r_2^2} \implies r_2 = \sqrt{\frac{P_s}{4\pi I_2}} = \sqrt{\frac{100}{4\pi \times 10^{-6}}}$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{10^8}{4\pi}} = \sqrt{7.96 \times 10^6} = \boxed{2820 \text{ m} \approx 2.8 \text{ km}}$$

(c) 거리가 2배가 되면 세기는 $1/4$배:

$$\Delta\beta = 10 \log \frac{I_2}{I_1} = 10 \log \frac{1}{4} = 10 \times (-0.602) = \boxed{-6.0 \text{ dB}}$$

음압 수준이 6 dB 감소한다. 이것은 역제곱 법칙의 직접적 결과이다.

문제 3 풀이

$\lambda = 0.50$ m, $L_1 = 4.20$ m, $L_2 = 4.95$ m

(a) 경로차:

$$\Delta L = |L_2 - L_1| = |4.95 - 4.20| = \boxed{0.75 \text{ m}}$$

(b)

$$\frac{\Delta L}{\lambda} = \frac{0.75}{0.50} = 1.5$$

$\Delta L/\lambda = 1.5$는 상쇄 간섭 조건 $0.5, 1.5, 2.5, \ldots$에 해당하므로, $\boxed{\text{상쇄 간섭(destructive interference)}}$ 이 일어난다. 점 P에서 두 파동이 정확히 반파장 위상차로 도착해 서로 상쇄되며, 두 파동의 진폭이 같다고 이상화하면 합성 진폭은 0이 된다(점음원 가정에서는 $1/r$ 감쇠로 진폭이 약 15% 차이나므로 실제로는 거의 완전 상쇄에 해당).

(c) $\lambda' = 0.60$ m이면:

$$\frac{\Delta L}{\lambda'} = \frac{0.75}{0.60} = 1.25$$

$\Delta L/\lambda' = 1.25$는 정수(보강)도 아니고 반정수(상쇄)도 아니다. 따라서 $\boxed{\text{불완전 간섭(intermediate interference)}}$ 이 일어난다. 합성 진폭은 0과 $2s_m$ 사이의 중간값이다. 1.25는 1.0 (보강)보다 1.5 (상쇄)에 더 가까우므로, 상쇄에 가까운 불완전 간섭이다.

문제 4 풀이

(a) 닫힌 끝에서 공기는 벽에 의해 움직일 수 없으므로 **변위가 0** 이다 → 마디(node). 열린 끝에서 공기는 외부와 자유롭게 소통하여 **변위가 최대** → 배(antinode). 이것은 줄의 정상파에서 고정단이 마디, 자유단이 배인 것과 같은 원리이다.

(b) 가장 단순한 정상파: 닫힌 끝에 마디, 열린 끝에 배 → 마디와 배 사이의 거리는 $\lambda/4$:

$$L = \frac{\lambda}{4} \implies \lambda = 4L$$

$$\boxed{f_1 = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{4L}}$$

(c) 닫힌 끝(마디)에서 열린 끝(배)까지의 거리 L에는 마디-배 간격 $\lambda/4$의 **홀수 배** 만 들어갈 수 있다:

$$L = n \times \frac{\lambda}{4}, \quad n = 1, 3, 5, \ldots$$

$$\lambda = \frac{4L}{n}, \quad f = \frac{v}{\lambda} = \frac{nv}{4L}, \quad n = 1, 3, 5, \ldots$$

짝수 n의 경우, 양 끝이 모두 마디이거나 모두 배가 되어 경계 조건(한쪽 마디, 한쪽 배)을 만족하지 않는다. 따라서 $\boxed{\text{홀수 배음만 가능하다.}}$

문제 5 풀이

(a) 두 파동의 중첩:

$$s = s_m \cos \omega_1 t + s_m \cos \omega_2 t = s_m(\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t)$$

삼각함수 항등식 $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$에서 $\alpha = \omega_1 t$, $\beta = \omega_2 t$를 대입:

$$s = s_m \cdot 2 \cos \left(\frac{\omega_1 t - \omega_2 t}{2} \right) \cos \left(\frac{\omega_1 t + \omega_2 t}{2} \right)$$

$$\boxed{s(t) = \left[2 s_m \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \right] \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right)}$$

(b) $\omega' = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)$로 놓으면, 대괄호 안의 항 $2 s_m \cos \omega' t$가 천천히 변하는 진폭이다.
진폭의 절댓값 $|2 s_m \cos \omega' t|$가 최대가 되는 것은 $\cos \omega' t = \pm 1$일 때이다.
$\cos \omega' t$의 한 주기($T' = 2\pi/\omega'$) 동안 $\cos \omega' t = +1$ 한 번, $\cos \omega' t = -1$ 한 번 → 맥놀이 최대가 **2번** 발생한다.
따라서 맥놀이 각진동수:

$$\omega_{\text{beat}} = 2\omega' = 2 \times \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} = \omega_1 - \omega_2$$

$\omega = 2\pi f$이고 일반적으로 f_1, f_2 대소가 정해지지 않으므로 절댓값으로:

$$\boxed{f_{\text{beat}} = |f_1 - f_2|}$$

(c) $f_1 = 262$ Hz, $f_2 = 266$ Hz:

$$f_{\text{beat}} = |f_1 - f_2| = |262 - 266| = 4 \text{ Hz}$$

$$\boxed{\text{1초 동안 맥놀이가 4회 발생한다.}}$$

문제 6 풀이

$v_S = 40$ m/s, $f = 500$ Hz, $v = 343$ m/s

(a) 기차가 접근할 때 (음원이 관측자에 접근, $v_O = 0$):

$$f' = f\frac{v}{v - v_S} = 500 \times \frac{343}{343 - 40} = 500 \times \frac{343}{303} = \boxed{566 \text{ Hz}}$$

(b) 기차가 멀어질 때:

$$f'' = f\frac{v}{v + v_S} = 500 \times \frac{343}{343 + 40} = 500 \times \frac{343}{383} = \boxed{448 \text{ Hz}}$$

(c) 진동수 변화량:

$$|f' - f''| = 566 - 448 = \boxed{118 \text{ Hz}}$$

물리적 설명: 기차가 접근할 때는 연속적으로 방출되는 파면이 앞쪽으로 압축되어 관측자가 더 짧은 파장(높은 진동수)을 감지한다. 기차가 멀어질 때는 파면이 뒤쪽으로 늘어나 더 긴 파장(낮은 진동수)이 된다. 접근 시 분모가 $v - v_S$ (작아짐 → 진동수 증가), 멀어질 시 분모가 $v + v_S$ (커짐 → 진동수 감소)인 것이 이를 수학적으로 반영한다.

문제 7 풀이

Ma = 2.5, $v = 343$ m/s

(a) 총알의 속력:

$$v_S = \text{Ma} \times v = 2.5 \times 343 = \boxed{857.5 \text{ m/s}}$$

(b) 마하 원뿔의 반각:

$$\sin\theta = \frac{v}{v_S} = \frac{1}{\text{Ma}} = \frac{1}{2.5} = 0.400$$

$$\theta = \arcsin(0.400) = \boxed{23.6°}$$

(c) 총알이 음속보다 빠르므로, 총알은 자신이 만든 음파보다 **앞서 나간다**. 충격파(마하 원뿔)는 총알의 현재 위치가 아닌 **뒤쪽** 으로 펼쳐진다.

관측자 바로 위를 총알이 지나가는 순간, 마하 원뿔의 표면(충격파)은 아직 관측자에게 도달하지 않았다. 충격파는 총알의 경로 뒤쪽으로 비스듬히 퍼지므로, 총알이 관측자를 지나간 후에야 원뿔 면이 관측자 위치에 도달한다.

기하학적으로, 반각 $\theta = 23.6°$인 원뿔의 표면은 총알의 진행 방향과 $90° - 23.6° = 66.4°$의 각도를 이룬다. 총알이 관측자 위를 지날 때, 충격파 면은 아직 관측자보다 뒤에 있으며, 총알이 더 진행한 후에야 원뿔 면이 관측자에 닿는다. 따라서 $\boxed{\text{관측자는 총알이 지나간 후에 소닉 붐을 듣는다.}}$