Chapter 12: Equilibrium and Elasticity — 풀이

문제 1 풀이

$L = 4.0$ m, $M = 50$ kg, A는 왼쪽 끝($x = 0$), B는 $x = 3.0$ m, 물체($m = 20$ kg)는 오른쪽 끝($x = 4.0$ m)

(a) 힘의 평형 (수직 방향):

$$F_A + F_B = Mg + mg = (50 + 20) \times 9.80 = 686 \text{ N} \quad \cdots (1)$$

토크의 평형 (A 점 기준, 반시계 방향을 양으로):

$$F_B \times 3.0 - Mg \times 2.0 - mg \times 4.0 = 0$$

$$F_B = \frac{Mg \times 2.0 + mg \times 4.0}{3.0} = \frac{50 \times 9.80 \times 2.0 + 20 \times 9.80 \times 4.0}{3.0}$$

$$F_B = \frac{980 + 784}{3.0} = \frac{1764}{3.0} = \boxed{588 \text{ N}}$$

식 (1)에서:

$$F_A = 686 - 588 = \boxed{98 \text{ N}}$$

(b) 보가 B를 기준으로 기울어지기 시작하는 임계 조건: $F_A = 0$ (A가 받침대에서 막 떨어지려는 순간).

이 순간 작용하는 힘은 F_B(위), Mg(아래), $m_c g$(아래) 셋. **B 점 기준 토크 평형** (반시계 방향 양으로):

- Mg: B에서 1.0 m 왼쪽, 아래 방향 → 반시계 토크 $+Mg(1.0)$
- $m_c g$: B에서 1.0 m 오른쪽, 아래 방향 → 시계 토크 $-m_c g(1.0)$
- F_B는 B에 작용하므로 토크 0

$$Mg(1.0) - m_c g(1.0) = 0$$

$$\boxed{m_c = M = 50 \text{ kg}}$$

검증: $m_c = 50$ kg일 때 A 기준 토크 $F_B(3.0) = Mg(2.0) + m_c g(4.0) = 50 \cdot 9.80 \cdot 2.0 + 50 \cdot 9.80 \cdot 4.0 = 2940$, $F_B = 980$ N. 힘 평형에서 $F_A = (50 + 50)(9.80) - 980 = 0$ ✓.

(c) 보는 $\boxed{\text{받침대 B를 기준으로}}$ 기울어진다. 물체가 오른쪽 끝에 매달려 있으므로, m이 증가하면 오른쪽에 작용하는 토크가 커져 보가 B를 받침점으로 시계 방향으로 회전하려 한다. B는 A보다 물체에 가까우므로, B가 회전의 받침점 역할을 하게 된다.

문제 2 풀이

$L = 5.0$ m, $M = 12$ kg, $\theta = 60°$, $m = 70$ kg

매끄러운 벽 → 벽이 사다리에 수평 힘 F_w만 작용 (마찰 없음)

바닥 → 수직 항력 N과 수평 마찰력 f

(a) $d = L/2 = 2.5$ m

힘의 평형:

수평: $f = F_w \cdots$ (1)

수직: $N = (M+m)g = (12+70) \times 9.80 = 803.6$ N $\cdots$ (2)

토크의 평형 (바닥 접점 기준):

사다리의 질량중심은 사다리 중간 ($L/2$), 바닥에서의 수평 거리: $(L/2)\cos\theta$

사람의 위치 $d = L/2$, 바닥에서의 수평 거리: $(L/2)\cos\theta$

벽의 힘 F_w가 작용하는 높이: $L\sin\theta$

$$Mg \cdot \frac{L}{2}\cos\theta + mg \cdot \frac{L}{2}\cos\theta - F_w \cdot L\sin\theta = 0$$

$$F_w = \frac{(M+m)g \cdot \frac{L}{2}\cos\theta}{L\sin\theta} = \frac{(M+m)g\cos\theta}{2\sin\theta} = \frac{(M+m)g}{2\tan\theta}$$

$$F_w = \frac{(82)(9.80)}{2\tan 60°} = \frac{803.6}{2 \times 1.732} = \frac{803.6}{3.464} = \boxed{232\text{ N}}$$

$$f = F_w = \boxed{232\text{ N}}$$

(b) 사람이 거리 d에 있을 때 토크의 평형 (바닥 접점 기준):

$$Mg \cdot \frac{L}{2}\cos\theta + mg \cdot d\cos\theta - F_w \cdot L\sin\theta = 0$$

$$F_w = \frac{Mg\frac{L}{2}\cos\theta + mgd\cos\theta}{L\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{L\sin\theta}\left(\frac{ML}{2} + md\right)g$$

사다리가 미끄러지는 조건: $f = F_w = \mu_s N = \mu_s(M+m)g$

$$\frac{\cos\theta}{L\sin\theta}\left(\frac{ML}{2} + md\right)g = \mu_s(M+m)g$$

$$\frac{ML}{2} + md = \mu_s(M+m)L\tan\theta$$

$$d = \frac{\mu_s(M+m)L\tan\theta - ML/2}{m}$$

$$d_{\text{max}} = \frac{0.40 \times 82 \times 5.0 \times 1.732 - 12 \times 5.0/2}{70}$$

$$= \frac{0.40 \times 82 \times 8.660 - 30.0}{70} = \frac{284.0 - 30.0}{70} = \frac{254.0}{70} = \boxed{3.63\text{ m}}$$

검증: $d_{\text{max}}/L = 3.63/5.0 = 0.73$, 사다리의 73% 지점까지 올라갈 수 있다.

(c) d_{max}의 식에서 $\tan\theta$가 커지면 (θ 증가) d_{max}도 증가한다. 사다리를 더 가파르게 세우면 벽에 수평으로 미는 힘(F_w)이 줄어들고, 따라서 필요한 마찰력도 줄어든다. 극한적으로 $\theta = 90°$이면 벽에 힘이 전혀 필요 없으므로 사다리가 미끄러지지 않는다.

문제 3 풀이

(a) 질량중심의 운동 방정식:

$$\vec{F}_{\text{net}} = M\vec{a}_{\text{com}}$$

정적 평형에서는 물체가 정지해 있으므로 $\vec{a}_{\text{com}} = \vec{0}$. 따라서:

$$\boxed{\sum \vec{F} = \vec{0}}$$

성분별로: $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$, $\sum F_z = 0$

(b) 회전 운동 방정식:

$$\vec{\tau}_{\text{net}} = I\vec{\alpha}$$

정적 평형에서는 물체가 회전하지 않으므로 $\vec{\alpha} = \vec{0}$. 따라서:

$$\boxed{\sum \vec{\tau} = \vec{0}}$$

(c) 입자 i의 위치를 절대 좌표계 원점 기준으로 $\vec{r}_i$라 하자. 점 O와 O′의 위치를 각각 $\vec{R}_O$, $\vec{R}_{O'}$이라 하면:

- O 기준 입자 위치: $\vec{r}_{i,O} = \vec{r}_i - \vec{R}_O$
- O′ 기준 입자 위치: $\vec{r}_{i,O'} = \vec{r}_i - \vec{R}_{O'}$

두 식의 차에서:

$$\vec{r}_{i,O} = \vec{r}_{i,O'} + (\vec{R}_{O'} - \vec{R}_O) \equiv \vec{r}_{i,O'} + \vec{d}$$

여기서 $\vec{d} = \vec{R}_{O'} - \vec{R}_O$는 **O에서 O′로 향하는 변위 벡터**로, 입자 인덱스 i에 의존하지 않는 상수 벡터다.

O 기준 알짜 토크:

$$\sum_i \vec{\tau}_{i,O} = \sum_i \vec{r}_{i,O} \times \vec{F}_i = \sum_i (\vec{r}_{i,O'} + \vec{d}) \times \vec{F}_i$$

$$= \sum_i \vec{r}_{i,O'} \times \vec{F}_i + \vec{d} \times \sum_i \vec{F}_i$$

힘의 평형 $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$에 의해 두 번째 항이 0:

$$\sum_i \vec{\tau}_{i,O} = \sum_i \vec{\tau}_{i,O'}$$

따라서 한 점에서 $\sum \vec{\tau} = \vec{0}$이면 임의의 다른 점에서도 $\sum \vec{\tau} = \vec{0}$. ■

문제 4 풀이

$L = 2.0$ m, $A = 4.0 \times 10^{-4}$ m^2, $E = 200$ GPa $= 2.0 \times 10^{11}$ Pa, $F = 8.0 \times 10^4$ N

(a)

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{8.0 \times 10^4}{4.0 \times 10^{-4}} = \boxed{2.0 \times 10^8 \text{ Pa} = 200 \text{ MPa}}$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{2.0 \times 10^8}{2.0 \times 10^{11}} = \boxed{1.0 \times 10^{-3}}$$

(b)

$$\Delta L = \varepsilon \cdot L = 1.0 \times 10^{-3} \times 2.0 = \boxed{2.0 \times 10^{-3} \text{ m} = 2.0 \text{ mm}}$$

(c) 알루미늄의 경우:

$$\Delta L_{\text{Al}} = \frac{FL}{AE_{\text{Al}}} = \frac{FL}{A} \cdot \frac{1}{E_{\text{Al}}}$$

$$\frac{\Delta L_{\text{Al}}}{\Delta L_{\text{steel}}} = \frac{E_{\text{steel}}}{E_{\text{Al}}} = \frac{200}{70} = \boxed{2.86 \text{ 배}}$$

영률이 작을수록 같은 응력에 대해 더 많이 변형되므로, 알루미늄이 강철보다 약 2.9배 더 많이 줄어든다.

문제 5 풀이

$a = 10.0 \text{ cm} = 0.100 \text{ m}$, $B = 140 \text{ GPa} = 1.40 \times 10^{11} \text{ Pa}$

$V = a^3 = (0.100)^3 = 1.00 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 1000 \text{ cm}^3$

(a) 체적탄성률의 정의: $\Delta p = -B\frac{\Delta V}{V}$

$$\left|\frac{\Delta V}{V}\right| = \frac{\Delta p}{B} = \frac{1.0 \times 10^8}{1.40 \times 10^{11}} = \boxed{7.14 \times 10^{-4}}$$

(b)

$$|\Delta V| = 7.14 \times 10^{-4} \times 1.00 \times 10^{-3} \text{ m}^3 = 7.14 \times 10^{-7} \text{ m}^3$$

$$= 7.14 \times 10^{-7} \times 10^6 \text{ cm}^3 = \boxed{0.714 \text{ cm}^3}$$

(c) $|\Delta V/V| = 0.010$이 되려면:

$$\Delta p = B \times 0.010 = 1.40 \times 10^{11} \times 0.010 = \boxed{1.40 \times 10^9 \text{ Pa} = 1.40 \text{ GPa}}$$

이는 약 1.4×10^4 기압에 해당한다.

문제 6 풀이

(a)

- **인장/압축 변형** : 물체의 한 축 방향으로 잡아당기거나(인장) 누르는(압축) 힘에 의해 그 방향으로 길이가 변하는 변형이다.

- **전단 변형** : 평행한 두 면에 서로 반대 방향의 힘이 면과 **평행하게** 작용하여, 한 면이 다른 면에 대해 평행하게 어긋나는(평행이동하는) 변형이다.
- **체적 변형** : 물체 표면 전체에 균일한 압력이 작용하여 부피가 변하는 변형이다.

(b) 영률에 의한 인장 변형:

$$\Delta L = \frac{FL}{AE} = \frac{5.0 \times 10^4 \times 1.5}{2.0 \times 10^{-4} \times 2.0 \times 10^{11}} = \frac{7.5 \times 10^4}{4.0 \times 10^7} = \boxed{1.875 \times 10^{-3} \text{ m} \approx 1.9 \text{ mm}}$$

(c) 전단탄성률에 의한 전단 변형:

$$\Delta x = \frac{FL}{AG} = \frac{5.0 \times 10^4 \times 1.5}{2.0 \times 10^{-4} \times 8.0 \times 10^{10}} = \frac{7.5 \times 10^4}{1.6 \times 10^7} = \boxed{4.69 \times 10^{-3} \text{ m} \approx 4.7 \text{ mm}}$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta L} = \frac{E}{G} = \frac{200}{80} = 2.5$$

$\boxed{\text{전단 변형이 인장 변형의 2.5배로 더 크다.}}$ 이는 $G < E$ (전단탄성률이 영률보다 작음)이기 때문이다. 일반적으로 고체는 축 방향 변형보다 전단 변형에 더 약하다.