Chapter 9: Center of Mass and Linear Momentum — 풀이

문제 1 풀이

$m_1 = 2.0\,\text{kg}$, $(x_1, y_1) = (0, 0)$; $m_2 = 5.0\,\text{kg}$, $(x_2, y_2) = (4.0, 0)$; $m_3 = 3.0\,\text{kg}$, $(x_3, y_3) = (2.0, 3.0)$

총 질량: $M = 2.0 + 5.0 + 3.0 = 10.0\,\text{kg}$

(a)

$$x_{\text{com}} = \frac{1}{M}\sum m_i x_i = \frac{(2.0)(0) + (5.0)(4.0) + (3.0)(2.0)}{10.0} = \frac{0 + 20.0 + 6.0}{10.0} = \boxed{2.6\,\text{m}}$$

$$y_{\text{com}} = \frac{1}{M}\sum m_i y_i = \frac{(2.0)(0) + (5.0)(0) + (3.0)(3.0)}{10.0} = \frac{9.0}{10.0} = \boxed{0.90\,\text{m}}$$

(b)

m_3가 증가하면, 질량중심 공식에서 입자 3의 기여가 커지므로 질량중심은 입자 3의 위치 $(2.0\,\text{m},\ 3.0\,\text{m})$ 쪽으로 이동한다.

$\boxed{\text{질량중심은 입자 3의 위치 방향}(x = 2.0\,\text{m},\ y = 3.0\,\text{m}\ \text{방향})\text{으로 이동한다.}}$

문제 2 풀이

(a)

뉴턴의 제2법칙의 운동량 형태:

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

외력이 0이면 ($\vec{F}_{\text{net}} = 0$):

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \implies \vec{P} = \text{일정}$$

따라서 $\boxed{\vec{P}_i = \vec{P}_f}$. 즉, 닫힌 고립계(외력 = 0)에서 전체 선운동량은 보존된다.

(b)

입자 1이 입자 2에 가하는 힘을 $\vec{F}_{12}$, 입자 2가 입자 1에 가하는 힘을 $\vec{F}_{21}$이라 하면, 뉴턴의 제3법칙에 의해 $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$이다.

전체 계에 대해: $\vec{F}_{\text{net}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$이므로 $d\vec{P}/dt = 0$이고 전체 운동량이 보존된다.

$\boxed{\text{내력은 뉴턴 제3법칙에 의해 상쇄되므로, 외력이 없으면 전체 운동량이 보존된다.}}$

(c)

코코넛과 세 조각은 하나의 닫힌 계를 이루며, 폭발력은 계 내부의 힘(내력)이다. 외력(마찰 없는 바닥이므로 수평 외력 = 0)이 작용하지 않으므로 전체 운동량이 보존된다. 초기 정지 상태이므로 $\vec{P}_i = 0$이고, 폭발 후에도 $\vec{P}_f = 0$이다.

$$\boxed{\text{폭발력은 내력이므로 전체 운동량을 변화시키지 못한다. } \vec{P}_i = \vec{P}_f = 0}$$

문제 3 풀이

$m = 0.40$ kg, $v_i = +30$ m/s, $v_f = -20$ m/s ($+x$를 양의 방향), $\Delta t = 5.0 \times 10^{-3}$ s

(a)

$$\Delta p = mv_f - mv_i = (0.40)(-20) - (0.40)(30) = -8.0 - 12.0 = \boxed{-20 \text{ kg}\cdot\text{m/s}}$$

(즉, $-x$ 방향으로 20 kg · m/s)

(b)

충격량-운동량 정리에 의해:

$$J = \Delta p = \boxed{-20 \text{ kg}\cdot\text{m/s}}$$

(즉, $-x$ 방향으로 20 N · s)

(c)

$$F_{\text{avg}} = \frac{|J|}{\Delta t} = \frac{20}{5.0 \times 10^{-3}} = \boxed{4000 \text{ N} = 4.0 \text{ kN}}$$

문제 4 풀이

$m_1 = 6.0$ kg, $v_{1i} = 8.0$ m/s, $m_2 = 2.0$ kg, $v_{2i} = 0$ (탄성 충돌)

(a)

1차원 탄성 충돌 공식 적용:

$$v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{6.0 - 2.0}{6.0 + 2.0}(8.0) = \frac{4.0}{8.0}(8.0) = \boxed{4.0 \text{ m/s}}$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1i} = \frac{2(6.0)}{6.0 + 2.0}(8.0) = \frac{12.0}{8.0}(8.0) = \boxed{12 \text{ m/s}}$$

(b)

충돌 전 운동 에너지:

$$K_i = \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 = \frac{1}{2}(6.0)(8.0)^2 = 192\,\text{J}$$

충돌 후 운동 에너지:

$$K_f = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 = \frac{1}{2}(6.0)(4.0)^2 + \frac{1}{2}(2.0)(12)^2 = 48 + 144 = 192\,\text{J}$$

$$\boxed{K_i = K_f = 192\,\text{J} \quad \text{— 운동 에너지가 보존된다.}}$$

문제 5 풀이

$m_1 = 4.0$ kg, $v_{1i} = 5.0$ m/s, $m_2 = 6.0$ kg, $v_{2i} = 2.0$ m/s (완전 비탄성 충돌)

(a)

운동량 보존:

$$m_1v_{1i} + m_2v_{2i} = (m_1 + m_2)V$$

$$V = \frac{m_1v_{1i} + m_2v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{(4.0)(5.0) + (6.0)(2.0)}{4.0 + 6.0} = \frac{20 + 12}{10} = \boxed{3.2\,\text{m/s}}$$

(b)

충돌 전:

$$K_i = \frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}(4.0)(5.0)^2 + \frac{1}{2}(6.0)(2.0)^2 = 50 + 12 = 62\,\text{J}$$

충돌 후:

$$K_f = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = \frac{1}{2}(10)(3.2)^2 = 51.2\,\text{J}$$

손실된 운동 에너지:

$$\Delta K = K_f - K_i = 51.2 - 62 = \boxed{-10.8\,\text{J}}$$

(c)

$$\frac{|\Delta K|}{K_i} \times 100\% = \frac{10.8}{62} \times 100\% = \boxed{17.4\%}$$

문제 6 풀이

(a)

운동량 보존:

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \tag{1}$$

운동 에너지 보존:

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \tag{2}$$

식 (1)을 변형:

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f}) = m_2 v_{2f} \tag{3}$$

식 (2)를 변형:

$$m_1 (v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2 v_{2f}^2$$

$$m_1 (v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2 v_{2f}^2 \tag{4}$$

식 (4)를 식 (3)으로 나누면:

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} \tag{5}$$

식 (5)를 식 (1)에 대입:

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} + m_2 (v_{1i} + v_{1f})$$

$$m_1 v_{1i} - m_2 v_{1i} = (m_1 + m_2) v_{1f}$$

$$\boxed{v_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, v_{1i}}$$

식 (5)에 대입:

$$v_{2f} = v_{1i} + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, v_{1i} = \frac{(m_1 + m_2) + (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}\, v_{1i}$$

$$\boxed{v_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\, v_{1i}}$$

(b)

- $m_1 = m_2$일 때: $v_{1f} = 0, v_{2f} = v_{1i}$. 입사체가 멈추고 표적이 입사체의 속도를 그대로 받는다 (당구공끼리의 정면 충돌).
- $m_1 \gg m_2$일 때: $v_{1f} \approx v_{1i}, v_{2f} \approx 2v_{1i}$. 무거운 물체는 거의 감속되지 않고, 가벼운 물체가 입사 속도의 약 2배로 튕겨 나간다 (포환이 골프공을 치는 경우).
- $m_1 \ll m_2$일 때: $v_{1f} \approx -v_{1i}, v_{2f} \approx 0$. 가벼운 물체가 거의 같은 속력으로 반대 방향으로 되튀고, 무거운 물체는 거의 움직이지 않는다 (공이 벽에 부딪히는 경우).

$$\boxed{\text{위 세 가지 극한 경우의 해석 참조}}$$

문제 7 풀이

$m_1 = 3.0$ kg, $v_{1i} = 5.0$ m/s, $m_2 = 2.0$ kg, $v_{2i} = 0, \theta_1 = 30°$ (2차원 탄성 충돌)

(a) 운동량 보존

x방향:

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2$$

$$3.0(5.0) = 3.0\, v_{1f} \cos 30° + 2.0\, v_{2f} \cos\theta_2$$

$$15 = 2.598\, v_{1f} + 2.0\, v_{2f} \cos\theta_2 \tag{1}$$

y방향:

$$0 = m_1 v_{1f} \sin\theta_1 - m_2 v_{2f} \sin\theta_2$$

$$0 = 3.0\, v_{1f} \sin 30° - 2.0\, v_{2f} \sin\theta_2$$

$$0 = 1.5\, v_{1f} - 2.0\, v_{2f} \sin\theta_2 \tag{2}$$

(b) 운동 에너지 보존

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2$$

$$\frac{1}{2}(3.0)(5.0)^2 = \frac{1}{2}(3.0) v_{1f}^2 + \frac{1}{2}(2.0) v_{2f}^2$$

$$75 = 3.0\, v_{1f}^2 + 2.0\, v_{2f}^2 \tag{3}$$

(c) 풀이

식 (2)에서: $v_{2f} \sin\theta_2 = 0.75\, v_{1f}$

식 (1)에서: $v_{2f}\cos\theta_2 = \dfrac{15 - 2.598\, v_{1f}}{2.0} = 7.5 - 1.299\, v_{1f}$

두 식을 제곱하여 더하면:

$$v_{2f}^2 = (0.75\, v_{1f})^2 + (7.5 - 1.299\, v_{1f})^2 = 0.5625\, v_{1f}^2 + 56.25 - 19.49\, v_{1f} + 1.687\, v_{1f}^2$$

$$v_{2f}^2 = 2.25\, v_{1f}^2 - 19.49\, v_{1f} + 56.25$$

식 (3)에 대입:

$$75 = 3.0\, v_{1f}^2 + 2.0(2.25\, v_{1f}^2 - 19.49\, v_{1f} + 56.25)$$

$$75 = 3.0\, v_{1f}^2 + 4.5\, v_{1f}^2 - 38.97\, v_{1f} + 112.5$$

$$7.5\, v_{1f}^2 - 38.97\, v_{1f} + 37.5 = 0$$

근의 공식:

$$v_{1f} = \frac{38.97 \pm \sqrt{38.97^2 - 4(7.5)(37.5)}}{2(7.5)} = \frac{38.97 \pm \sqrt{1518.7 - 1125}}{15} = \frac{38.97 \pm 19.84}{15}$$

$v_{1f} = 3.92$ m/s 또는 $v_{1f} = 1.28$ m/s

물리적으로 의미 있는 빗겨 맞는 충돌(glancing collision) 해는 $v_{1f} = 3.92$ m/s이다 (입사체가 표적보다 무거우므로 전방으로 계속 진행).

$$\boxed{v_{1f} \approx 3.9 \text{ m/s}}$$

v_{2f}를 구하면:

$$v_{2f}^2 = 2.25(3.92)^2 - 19.49(3.92) + 56.25 = 34.57 - 76.40 + 56.25 = 14.42$$

$$\boxed{v_{2f} \approx 3.8 \text{ m/s}}$$

θ_2를 구하면:

$$\tan\theta_2 = \frac{v_{2f}\sin\theta_2}{v_{2f}\cos\theta_2} = \frac{0.75(3.92)}{7.5 - 1.299(3.92)} = \frac{2.94}{2.41} = 1.22$$

$$\boxed{\theta_2 \approx 51^\circ \text{ (} +x\text{축 아래 방향)}}$$

검산: $K_f = \frac{1}{2}(3.0)(3.92)^2 + \frac{1}{2}(2.0)(3.80)^2 = 23.1 + 14.4 = 37.5 \text{ J} = K_i$ ✓