Chapter 8: Potential Energy and Conservation of Energy — 풀이

문제 1 풀이

$m = 2.0$ kg, $v_0 = 15$ m/s, 수직 위로 던짐. 기준점: 지면 ($y = 0$).

(a) 최대 높이에서 $v = 0$. 역학적 에너지 보존:

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = 0 + mgh$$

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{(15)^2}{2(9.8)} = \frac{225}{19.6} = \boxed{11.5 \text{ m}}$$

(b) 높이 $y = 5.0$ m에서:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mgy$$

$$v = \sqrt{v_0^2 - 2gy} = \sqrt{(15)^2 - 2(9.8)(5.0)} = \sqrt{225 - 98} = \sqrt{127} = \boxed{11.3 \text{ m/s}}$$

(c) 기준점을 최대 높이 h로 설정하면 지면의 높이는 $y' = -h = -11.5$ m이므로:

$$U_{\text{지면}} = mgy' = (2.0)(9.8)(-11.5) = \boxed{-225 \text{ J}}$$

최대 높이에서의 답에 영향을 주는지: 기준점 선택은 U의 절대값에 영향을 주지만, ΔU는 변하지 않으므로 물리적 결과(최대 높이 등)에는 영향을 주지 않는다.

문제 2 풀이

(a) 보존력의 정의:

입자가 임의의 닫힌 경로를 따라 한 바퀴 돌아 원래 위치로 돌아올 때, 그 힘이 한 알짜 일이 0인 힘을 보존력이라 한다:

$$\boxed{\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0}$$

동등하게, 보존력이 두 점 사이에서 하는 일은 경로에 무관하다.

(b)

- 중력: 물체가 높이 y_i에서 y_f로 이동할 때, 중력이 한 일은 $W_g = -mg(y_f - y_i) = -mg\Delta y$로서 오직 높이 차이에만 의존하고 경로에 무관하다. 따라서 보존력이다.

- 용수철 힘: $F = -kx$에 의한 일은 $W = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2$로서 시작점과 끝점의 변위에만 의존하고 경로에 무관하다. 따라서 보존력이다.

(c) 운동 마찰력은 항상 운동 방향의 반대로 작용하므로, 어떤 경로를 택하든 항상 음의 일을 한다. 물체가 닫힌 경로를 돌아와도 마찰력이 한 알짜 일은 0이 아니라 음수이다. 마찰에 의해 역학적 에너지가 열에너지로 비가역적으로 전환되기 때문에 비보존력이다.

(d) $\Delta U = -W$이고, 1차원에서 $W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx$이므로:

$$\Delta U = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx$$

미소 변위에 대해 $dU = -F(x)\,dx$이므로:

$$\boxed{F(x) = -\frac{dU}{dx}}$$

문제 3 풀이

$k = 500$ N/m, $m = 0.50$ kg, $x_0 = 0.10$ m (압축량)

(a) 탄성 퍼텐셜 에너지:

$$U = \frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}(500)(0.10)^2 = \boxed{2.5\text{ J}}$$

(b) 자연 길이 위치($x = 0$)에서 $U = 0$. 역학적 에너지 보존:

$$\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = x_0\sqrt{\frac{k}{m}} = 0.10\sqrt{\frac{500}{0.50}} = 0.10 \times 31.62 = \boxed{3.16\text{ m/s}}$$

(c) $x_1 = 0.050$ m에서:

$$\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$$

$$v_1 = \sqrt{\frac{k}{m}(x_0^2 - x_1^2)} = \sqrt{\frac{500}{0.50}((0.10)^2 - (0.050)^2)}$$

$$= \sqrt{1000 \times (0.010 - 0.0025)} = \sqrt{1000 \times 0.0075} = \sqrt{7.5} = \boxed{2.74\text{ m/s}}$$

문제 4 풀이

$m = 5.0\,\mathrm{kg}, h = 3.0\,\mathrm{m}, \mu_k = 0.30, \theta = 30°$

경사면 길이: $d = h/\sin\theta = 3.0/\sin 30° = 6.0\,\mathrm{m}$

(a) 에너지 보존 (마찰 포함):

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh - f_k d = mgh - \mu_k mg\cos\theta \cdot d$$

$$v = \sqrt{2g(h - \mu_k \cos\theta \cdot d)}$$

$$= \sqrt{2(9.8)(3.0 - 0.30 \times \cos 30° \times 6.0)}$$

$$= \sqrt{2(9.8)(3.0 - 0.30 \times 0.866 \times 6.0)}$$

$$= \sqrt{2(9.8)(3.0 - 1.559)}$$

$$= \sqrt{2(9.8)(1.441)} = \sqrt{28.24} = \boxed{5.31\,\mathrm{m/s}}$$

(b) 마찰에 의한 열에너지:

$$\Delta E_{\mathrm{th}} = f_k d = \mu_k mg\cos\theta \cdot d = (0.30)(5.0)(9.8)(\cos 30°)(6.0)$$

$$= (0.30)(5.0)(9.8)(0.866)(6.0) = \boxed{76.4\,\mathrm{J}}$$

(c) 마찰이 없을 때:

$$v_{\mathrm{no\ friction}} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.8)(3.0)} = \sqrt{58.8} = \boxed{7.67\,\mathrm{m/s}}$$

마찰이 있을 때(5.31 m/s)보다 마찰이 없을 때(7.67 m/s)가 상당히 빠르다. 마찰에 의해 역학적 에너지의 일부(76.4 J)가 열에너지로 전환되었기 때문이다.

문제 5 풀이

(a) 초기 상태: 높이 h에서 정지 ($K = 0, U_g = mgh, U_s = 0$). 최종 상태: 용수철이 d만큼 압축, 수평면 ($K = 0$, $U_g = 0, U_s = \frac{1}{2}kd^2$).

역학적 에너지 보존:

$$mgh = \frac{1}{2}kd^2$$

$$\boxed{d = \sqrt{\frac{2mgh}{k}}}$$

(b) 용수철이 최대로 압축된 순간 물체의 속력은 $\boxed{v = 0}$이다.

최대 압축 시점은 물체가 순간적으로 정지하는 전환점(turning point)이다. 물체의 운동 에너지가 모두 용수철의 탄성 퍼텐셜 에너지로 전환된 상태이기 때문이다.

(c) 마찰이 있는 경우, 물체는 수평 거리 L을 이동한 후 용수철을 d만큼 압축하므로 마찰이 작용하는 총 수평 거리는 $(L + d)$이다:

$$mgh = \frac{1}{2}kd^2 + \mu_k mg(L + d)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}kd^2 + \mu_k mg\, d + \mu_k mgL - mgh = 0}$$

이는 d에 대한 이차방정식이며, 근의 공식을 적용하면:

$$d = \frac{-\mu_k mg + \sqrt{(\mu_k mg)^2 + 2k(mgh - \mu_k mgL)}}{k}$$

(물리적으로 $d > 0$이어야 하므로 양의 근만 취한다.)

문제 6 풀이

$U(x) = 4x^2 - 2x^3$

(a) $F(x) = -\dfrac{dU}{dx}$

$$\frac{dU}{dx} = 8x - 6x^2$$

$$F(x) = -(8x - 6x^2) = -8x + 6x^2$$

$x = 1.0$ m에서:

$$F(1.0) = -8(1.0) + 6(1.0)^2 = -8 + 6 = \boxed{-2.0\,\text{N}}$$

(음의 x 방향, 즉 $-x$ 방향으로 작용)

(b) 평형점: $F(x) = 0 \implies -8x + 6x^2 = 0 \implies x(-8 + 6x) = 0$

$$\boxed{x = 0 \quad \text{및} \quad x = \frac{4}{3} \approx 1.33\,\text{m}}$$

(c) $\dfrac{d^2U}{dx^2} = 8 - 12x$를 이용하여 판별:

- $x = 0$: $\dfrac{d^2U}{dx^2} = 8 > 0 \implies U$가 극소 $\implies$ $\boxed{\text{안정 평형 (stable)}}$
- $x = \dfrac{4}{3}$: $\dfrac{d^2U}{dx^2} = 8 - 12\left(\dfrac{4}{3}\right) = 8 - 16 = -8 < 0 \implies U$가 극대 $\implies$ $\boxed{\text{불안정 평형 (unstable)}}$

문제 7 풀이

$m = 4.0$ kg, $F = 20$ N (수평), $d = 6.0$ m, $v_0 = 2.0$ m/s, $v = 5.0$ m/s

(a) 외력이 한 일:

$$W = Fd = (20)(6.0) = \boxed{120\text{ J}}$$

(b) 운동 에너지 변화:

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(4.0)(5.0)^2 - \frac{1}{2}(4.0)(2.0)^2$$

$$= 50.0 - 8.0 = \boxed{42.0\text{ J}}$$

(c) 수평면에서 $\Delta U = 0$이므로 $\Delta E_{\text{mec}} = \Delta K$. 에너지 보존:

$$W = \Delta E_{\text{mec}} + \Delta E_{\text{th}}$$

$$\Delta E_{\text{th}} = W - \Delta K = 120 - 42.0 = \boxed{78.0\text{ J}}$$

(d) $\Delta E_{\text{th}} = f_k d = \mu_k mg\, d$이므로:

$$\mu_k = \frac{\Delta E_{\text{th}}}{mgd} = \frac{78.0}{(4.0)(9.8)(6.0)} = \frac{78.0}{235.2} = \boxed{0.33}$$